# 第I章

# 差分(定差)方程式

## §0　差分(定差)方程式の例

**例 1 (人口の変化)**　ある国の人口は毎年 $a$ %の割合で増えていきます．$n$ 年後の人口を $P_n$ とするとき，$P_{n+1}$ を $P_n$ で表わしなさい．

**例 2 (Fibonacci の数列)**　各項はその前の項と前の前の項の和になっていて，最初の項 $a_0$ は 0 であり，その次の項 $a_1$ が 1 である数列を Fibonacci の数列という．すなわち，

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_0 = 0 \;\; , \;\; a_1 = 1$$

**例 3**　平面上に $n$ 本の直線があり，どの 2 本の直線も平行でなく，どの 3 本の直線も 1 点では交わらないとき，これら $n$ 本の直線により分割される領域の個数を $a_n$ とする．$a_{n+1}$ を $a_n$ で表わしなさい．

**例 4 (ロジスティック増殖)**　ある池にメダカがすんでいます。メダカはたくさんの子供を生むのですが一年後までには相当数の子供が死んでしまいます。また，この湖もそんなに広いわけではないのでメダカの数が $C$ 匹を超えると次の年には減ってしまいます。このような理由で現在のメダカの数を $p$ とすると，次の年のメダカの数は前の年より $a(1-p/C)p$ 万匹増える (ただし，$p$ が $C$ を超えると減る) とします ($a$ はある正の定数)。$n$ 年後にはメダカの数はどうなるでしょうか。$n$ 年後のメダカの数を $p_n$ 匹として $p_{n+1}$ を $p_n$ で表わしなさい．

**例 5 (携帯電話の普及)** 日本の人口を $N$ 人とします．その内で，現在携帯電話を所有している人の数を $x_0$ とします．携帯電話の普及は現在携帯電話を所有している人の数に比例し，また現在携帯電話を所有していない人の数にも比例するとします．このことから，次のような漸化式が成り立ちます．

$$x_{n+1} - x_n = kx_n(N - x_n)$$

**例 6 (木村先生の線形代数より — ある森の物語)** ある森にウサギとキツネが住んでいます。ウサギは，一年間に $a$ 倍に増えるのですがその間に何匹かはキツネに食べられてしまいます。一匹のキツネは平均して，一年に $b$ 匹のウサギを食べます。キツネについては，年をとったり，食料難のために，毎年，$c$ % のキツネが死んでいきます。しかし，子ギツネも生まれます。生まれる子ギツネの数は，前の年のウサギの数の $d$ % になります。それは母ギツネがウサギの数を見て子供を作るからです。ウサギの数とキツネの数は $n$ 年後にはどうなるでしょうか。$n$ 年後のウサギの数を $R_n$，キツネの数を $F_n$ とするとき, $R_{n+1}$ と $F_{n+1}$ を $R_n$，$F_n$ を用いて表わしなさい．また，この式を行列の形

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

で書きなさい。

**例 7 (ある森の物語の変形)** ある森にウサギとキツネが住んでいます。前の年のウサギの数を $R$，キツネの数を $F$ とすると，次の年のウサギの数は病気で死んだり生まれたりして $(1 + A(1 - R/C))R$ 匹になるのですが，そのほかに キツネに $DRF$ 匹食べられてしまいます。また，次の年のキツネの数は $QDRF$ 匹になります。ウサギの数とキツネの数は $n$ 年後にはどうなるでしょうか。$n$ 年後のウサギの数を $R_n$，キツネの数を $F_n$ とするとき, $R_{n+1}$ と $F_{n+1}$ を $R_n$，$F_n$ を用いて表わしなさい．

(ここで，$A$:増殖率，$C$:容量，$D$:捕食率，$Q$:転換率　といい，いずれも正の定数とする)

**例 8** アユの寿命は 3 年とします。ことし生まれた赤ちゃんアユのうち，一年後まで生き残れるアユは 5 %とします。また，満 1 歳のアユが次の年まで生き残れるのは半分とします。満 2 歳のアユが次の年まで生き残れるのも半分とします。満 3 歳のアユは次の年までにはすべて死んでしまいます。また，満 1 歳アユは毎年一匹あたり平均 10 匹の赤ちゃんアユを産み，満 2 歳アユは毎年一匹あたり 20 匹の赤ちゃんアユを産むとします。満 3 歳のアユはもう子供を産みません。(もっと沢山生むのですが大半は孵化しなかったり，大きな魚などに食べられてしまう)．いま，一匹もアユの住んでいない湖に赤ちゃん

アユを 100 万匹放流すれば，$n$ 年後の各年令のアユの個数はそれぞれ何匹になるでしょうか。$n$ 年後の赤ちゃんアユの数を $P_n^0$ ，満 1 歳アユの数を $P_n^1$ ，満 2 歳アユの数を $P_n^2$ ，満 3 歳アユの数を $P_n^3$ として漸化式 (差分方程式) を作りなさい。また，例 5 のようにこれを行列の形で書きなさい。

**例 9 (ローン返済　2004 年兵庫県立大学経済・経営学部前期入試問題の変形)**　A 氏はある年に B 銀行から年利 $r$ で $a$ 円を借りることにした．1 年後から毎年借りた日と同じ日に一定額 $b$ 円を返済して，20 回で返済が終わるようにしたい．$(n+1)$ 年後の返済直後のローン残高 $x_{n+1}$ を $a$ ，$b$ ，$x_n$ を用いて表わせ．ただし，利息の計算は 1 年ごとの複利計算とする．また，20 回で返済が終わるようにするには $b$ をどのように定めればよいか.

**例 10 (Markov chain　天候の確率)**　毎日の天候が「晴れ」,「曇り」,「雨」の 3 種類しかないとしよう.

「晴れ」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.7,「曇り」である確率は 0.2,「雨」である確率は 0.1.「曇り」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.5,「曇り」である確率は 0.3,「雨」である確率は 0.2.「雨」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.3,「曇り」である確率は 0.4,「雨」である確率は 0.3 であるとしよう.

今日が「晴れ」とするとき，$n$ 日後の天候が「晴れ」である確率を $x_n$,「曇り」である確率を $y_n$,「雨」である確率を $z_n$ とするとき，$x_{n+1}$ ，$y_{n+1}$ ，$z_{n+1}$ を $x_n$ ，$y_n$ ，$z_n$ で表わせ.

**例 11**　$\cos n\theta$ ，$\sin n\theta$ を $\cos\theta$ ，$\sin\theta$ を用いて表わしたい．$P_n(X)$ を $X$ の $n$ 次多項式, $Q_n(X)$ を $X$ の $(n-1)$ 次多項式として

$$\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$$
$$\sin n\theta = Q_n(\cos\theta)\sin\theta$$

と表わせることを示し，$P_{n+1}(X)$ ，$Q_{n+1}(X)$ を $P_n(X)$ ，$Q_n(X)$ を用いて表わしなさい.

**例 12**　異なる $n$ 個のものを $k$ 組に分ける分け方の総数を $f(n,k)$ とするとき，$f(n+1,k)$ を $f(n,k)$ と $f(n,k-1)$ を用いて表わしなさい．(ヒント：特定の 1 個が単独で 1 個だけの組を作っている場合とそれが 2 個以上の組を作っている場合に分けて考えなさい)

また，$f(n,1)=1$ ，$f(n,n)=1$ であり，上で作った漸化式を用いて，$f(5,3)$ を計算しなさい.

**例 13**　自然数 $n$ をいくつかの自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n)$ とする．また，自然数 $n$ を $k$ 個の自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n,k)$ とする．このとき，

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$$

である．

言い換えると $p(n,k)$ は方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad (x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1)$$

の自然数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ の個数に等しい．$p(n,k)$ を $p(n-k,k)$ と $p(n-1,k-1)$ を用いて表わせ..（ヒント：$x_k = 1$ の場合と $x_k \geq 2$ の場合に分けて考えなさい)

さらに，これらを用いて $p(10)$ を計算しなさい．

**例 14 (Mandelbrot Set)**　複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + \alpha \quad , \quad z_0 = 0$$

を考える．$n \to \infty$ のとき，$z_n$ が有界にとどまるような複素数 $\alpha$ の集合を Mandelbrot Set という．この Mandelbrot Set は複素平面上でどのような集合となるか？

**例 15 (Julia Set)**　複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + C \quad , \quad z_0 = \alpha$$

を考える．$n \to \infty$ のとき，$z_n$ が有界にとどまるような複素数 $\alpha$ の集合を Julia Set という．この Julia Set は複素平面上でどのような集合となるか？ ただし，$C$ は複素定数とする．

**例 16 (Newton 法)**　方程式 $f(x) = 0$ の解の近似値を求める方法に Newton 法と呼ばれるものがある．今，閉区間 $[a,b]$ で $f(x)$ は 2 回続的微分可能であるとし，$f''(x) > 0$，$f(a) > 0$，$f(b) < 0$　とする．このとき，方程式 $f(x) = 0$ は $a$ と $b$ の間に唯一つの解 $alpha$ を持つことが分かり，それは次のような方法で近似できる．$\alpha_0 = a$ とし，$x = \alpha_0$ で $y = f(x)$ の接線を考えその接線と $x$ 軸との交点を $\alpha_1$ とする．さらに，$x = \alpha_1$ において接線を引き $x$ 軸との交点を $\alpha_2$ とする．この操作を続けていくと，数列 $\{\alpha_n\}$ は方程式の解 $\alpha$ に収束していく．

$\alpha_{n+1}$ を $\alpha_n$ を用いて表わせ．また，閉区間 $[1,2]$ において．方程式 $f(x) = 2 - x^2$ の解 $\sqrt{2}$ を近似する漸化式を作れ．

注意

(1)　$f''(x) > 0$，$f(a) < 0$，$f(b) > 0$ の時は $\alpha_0 = b$ とする．

(2)　$f''(x) < 0$，$f(a) > 0$，$f(b) < 0$ の時は $\alpha_0 = b$ とする．

(3)　$f''(x) < 0$，$f(a) < 0$，$f(b) > 0$ の時は $\alpha_0 = a$ とする．

# §1　線型の差分方程式の数学的解法

## 1.1　単独1階線型定数係数差分方程式の解法

(1 - 1)　$x_{n+1} = ax_n + f_n$

ここで, $a$ は与えられた定数, $f_n$ は与えられた数列とする.

**$f_n \equiv 0$ のとき**

このときは, $x_{n+1} = ax_n$ で，$x_n$ は公比 $a$ の等比数列となるので,

(1 - 2)　$x_n = a^n x_0$

である.

**$f_n \equiv f$(定数) のとき**

$a = 1$ のとき は，$x_{n+1} - x_n = f$ で，$x_n$ は公差 $f$ の等差数列となるので,

(1 - 3)　$x_n = nf + x_0$

である.

$a \neq 1$ のとき は，すべての $n$ に対して $x_n = \beta$ となる不動点を求める.

$$\beta = a\beta + f \quad , \quad \beta = \frac{f}{1-a}$$

すると，$x_{n+1} - \beta = ax_n + f - \beta = ax_n + (\beta - a\beta) - \beta = a(x_n - \beta)$
となる．ここで，すべての $n$ について，$y_n = x_n - \beta$ とおけば，$y_{n+1} = ay_n$ となり，$\{y_n\}$ は等比数列となる．よって，$y_n = a^n y_0 = a^n(x_0 - \beta)$ となり,

(1 - 4)　$x_n = y_n + \beta = a^n(x_0 - \beta) + \beta$　,　ここで，$\beta = \dfrac{f}{1-a}$

**$f_n$ が一般のとき**

$a = 0$ のときは，$x_n = f_n$ $(n \geq 1)$ となり，trivial(自明) となるので，$a \neq 0$ としよう．このとき，(1-1) の両辺を $a^{n+1}$ で割る.

$$\frac{x_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{x_n}{a^n} + \frac{f_n}{a^{n+1}}$$

ここで，すべての $n$ について，$y_n = \dfrac{x_n}{a^n}$ とおくと,

(1 - 5)　$y_{n+1} = y_n + \dfrac{f_n}{a^{n+1}}$

これより，

(1 - 6)　　$y_n = \sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) + y_0 = \dfrac{1}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f_k}{a^k} + y_0$

$x_n = a^n y_n$ ，$y_0 = x_0$ より，

(1 - 7)　　$x_n = a^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f_k}{a^k} + a^n x_0$

**問題 1 - 1**　$f_n \equiv f$(定数) のときは (1-7) は（1-3) や (1-4) と同じになることを確かめなさい.

**問題 1 - 2** (1)　$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ や $\sum_{k=0}^{n} k^2x^{k-1}$ を計算しなさい.

(2)　(1) を用いて $x_{n+1} = ax_n + n$ を解きなさい.

(3)　(1) を用いて $x_{n+1} = ax_n + n^2$ を解きなさい.

(4)　$x_{n+1} = ax_n + b^n$ を計算しなさい.

### $f_n$ が一般のときの別解法

今，初期値 $x_0$ は無視して方程式 (1-1) だけを考える.（1-1) の一つの解 (**特殊解**)$\{\hat{x}_n\}$ が求まったとしよう．このとき，方程式が線型であることから，$f_n \equiv 0$ とした方程式

(1 - 8)　　$y_{n+1} = ay_n$

の **一般解**(任意定数 $C$ を含んだ解) は $y_n = Ca^n$ となるので，(1-1) の一般解は

(1 - 9)　　$x_n = Ca^n + \hat{x}_n$

となる.

**問題 1 - 3**　上のことを証明しなさい．すなわち, (1-1) の一つの解 $\{\hat{x}_n\}$ が分かったとき, $x_n = Ca^n + \hat{x}_n$ も (1-1) を満たすことを示しなさい.

**問題 1 - 4**　$x_0$ と特殊解の初期値 $\hat{x}_0$ が分かっているとして，(1-9) の $C$ をこれらを用いて表わしなさい.

### $f_n$ が $n$ の多項式のときの特殊解の見つけ方

$a \neq 1$ のときは，$f_n$ と同じ次数の多項式として，$\hat{x}_n$ を求めることが出来る.
$a = 1$ のときは，$\hat{x}_n = n\times(f_n$ と同じ次数の多項式) を求めることが出来る.

**問題 1 - 5**　(1) $x_{n+1} = ax_n + n$ の特殊解を求めなさい.

(2)　$x_{n+1} = ax_n + n^2$ の特殊解を求めなさい.

**$f_n$ が $n$ の指数関数のときの特殊解の見つけ方**

$f_n = cb^n \quad (b \neq 0)$ とすると，(1-1) は

(1 - 10)　$x_{n+1} = ax_n + cb^n$

となる．
$b \neq a$ のとき は

(1 - 11)　$x_n = Ab^n$

の形で特殊解を求めることが出来る．
$b = a$ のとき は

(1 - 12)　$x_n = Anb^n$

の形で特殊解を求めることが出来る．

**問題 1 - 6**　(1)　$b \neq a$ のとき．(1-11) の $A$ を求めなさい．
(2)　$b = a$ のとき．(1-12) の $A$ を求めなさい．

**問題 1 - 7**　$\{\hat{y}_n\}$ を方程式 $y_{n+1} = ay_n + f_n$ の特殊解とし，$\{\hat{z}_n\}$ を方程式 $y_{z+1} = ay_n + g_n$ の特殊解とするとき，$\hat{x}_n = \hat{y}_n + \hat{z}_n$ は方程式 $x_{n+1} = ax_n + f_n + g_n$ の特殊解になっていることを示しなさい．

**$f_n = Q(n)b^n$ ($Q(n)$ は $n$ の多項式) のときの特殊解の見つけ方**

(1 - 13)　$x_{n+1} = ax_n + Q(n)b^n$

$b \neq a$ のとき は

(1 - 14)　$x_n = P(n)b^n$　(ここで, $P(n)$ は $Q(n)$ と同じ次数の多項式)

の形で特殊解を求めることが出来る．

$b = a$ のとき は

(1 - 15)　$x_n = nP(n)b^n$　(ここで, $P(n)$ は $Q(n)$ と同じ次数の多項式)

の形で特殊解を求めることが出来る．

**問題 1 - 8**　(1)　(1-13) において，$Q(n) = n$ のとき，(1-13) の特殊解を求めなさい，
(2)　(1-13) において，$Q(n) = n^2$ のとき，(1-13) の特殊解を求めなさい，
(3)　(1-13) において，$Q(n) = n^3$ のとき，(1-13) の特殊解を求めなさい，

# 問　題　1

1.　P1〜P4 の 16 個の例の中で単独 1 階線型定数係数差分方程式となっているのはどれか？　それらを数学的に解きなさい．

2.　次の単独 1 階線型定数係数差分方程式を解きなさい．(4) 以下の方程式については 2 種類の方法で解きなさい．

(1)　$x_{n+1} = 2x_n$

(2)　$x_{n+1} = 2x_n + 1$

(3)　$x_{n+1} = x_n + 3$

(4)　$x_{n+1} = x_n + n$

(5)　$x_{n+1} = 2x_n + n$

(6)　$x_{n+1} = 2x_n + 3^n$

(7)　$x_{n+1} = x_n + 3^n$

(8)　$x_{n+1} = 3x_n + 3^n$

(9)　$x_{n+1} = 2x_n + 3^n n$

(10)　$x_{n+1} = 2x_n + 2^n n$

(11)　$x_{n+1} = 2x_n + 3^n n^2$

(12)　$x_{n+1} = 2x_n + 2^n n^2$

## 1.2　単独 1 階線型差分方程式の解法 (係数が $n$ に関係するとき)

(1 - 16)　$$x_{n+1} = a_n x_n + f_n$$

ここで, $\{a_n\}$ と $\{f_n\}$ は与えられた数列とする.

　今，すべての $n$ について $a_n \neq 0$ と仮定する．$a_0$ から $a_n$ までの積を

(1 - 17)　$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 a_2 \cdots a_n$$

と書く．(1-16) の両辺を (1-17) で割ると，

(1 - 18)　$$\frac{x_{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} a_k} = \frac{x_n}{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} + \frac{f_n}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$$

ここで,

(1 - 19)　$$y_n = \frac{x_n}{\prod_{k=0}^{n-1} a_k}$$

とおくと,

(1 - 20)　$$y_{n+1} = y_n + \frac{f_n}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$$

となって，これより,

(1 - 21)　$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n}{\prod_{i=0}^{k} a_i}$$

(1 - 22)　$$x_n = \left( x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{i=0}^{k} a_i} \right) \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

が得られる.

**問題 1 - 9**　上で得られた (1-22) が容易に計算できる数列 $\{a_n\}$ と $\{f_n\}$ の例を与え，その場合に，$x_n$ を計算せよ．ただし，数列 $\{a_n\}$ は必ず $n$ に関係するものをとり，数列 $\{f_n\}$ は $n$ に関係してもしなくてもよい.

## 1.3 単独 2 階線型定数係数差分方程式の解法 (同次方程式のとき)

ここでは，単独 2 階線型定数係数差分方程式

(1 - 23) $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f_n$

を考えよう．ここで, $a, b$ は与えられた定数, $f_n$ は与えられた数列とする．ただし，$b \neq 0$ とする．($b = 0$ のときは実質，1 階の方程式となるから) 2 階の差分方程式の解は，最初の 2 項 $x_0$ と $x_1$ が与えられれば，$x_2$ , $x_3$ , $x_4$ , $\cdots$ が一意的に定まっていく．

最初は **同次方程式 ( $f_n \equiv 0$ の場合)** のときを考える．

(1 - 24) $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$

**問題 1 - 10** (1) $\{y_n\}$ , $\{z_n\}$ を (1-24) の 2 つの解とするとき，それらの 1 次結合 $\{C_1y_n + C_2z_n\}$ もまた (1-24) の解であることを示せ．このことは同次差分方程式 (1-24) の解全体はベクトル空間[1] の部分空間になっていることを示している．これを，同次方程式 (1-24) の **解空間** と呼ぶ．

(2) $\{y_n\}$ を $y_0 = 1$ , $y_1 = 0$ となる (1-24) の解とし，$\{z_n\}$ を $z_0 = 0$ , $z_1 = 1$ となる (1-24) の解としよう．このとき，(1-24) の任意の解 $\{x_n\}$ に対して，$x_n$ を $y_n$ , $z_n$ , $x_0$ , $x_1$ を用いて表わせ．この結果，$\{\{y_n\}$ , $\{z_n\}\}$ が (1-24) の解空間の 生成系 になっていることが分かる．

(3) $\{y_n\}$ , $\{z_n\}$ を (2) で与えた (1-24) の解としよう．このとき，$\{C_1y_n + C_2z_n \equiv 0$ であれば，$C_1 = C_2 = 0$ であることを示せ．(この結果，(2) の $\{\{y_n\}$ , $\{z_n\}\}$ は 1 次独立 であることが分かり，これらより，$\{\{y_n\}$ , $\{z_n\}\}$ は (1-24) の解空間の 基底 となり，この解空間は 2 次元であることがわかる．

(1-24) の解として

(1 - 25) $x_n = \lambda^n$ ($\lambda$は 0 と異なる定数)

の形のものを求めよう．これを (1-24) に代入してすると，

$$\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = 0$$

$\lambda$ は 0 と異なるので $\lambda^n$ で両辺を割ると，$\lambda$ についての 2 次方程式

(1 - 26) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

[1] ここでは全体のベクトル空間として無限数列全体を考えている

が得られる．これを，(1-23) あるいは (1-24) の **特性方程式** と呼ぼう．この特性方程式は 2 つの解 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ をもつ．

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ **のとき**

このとき，$\{\lambda_1^n\}$ , $\{\lambda_2^n\}$ は同次差分方程式 (1-24) の異なる解である．

問題 1-10 の (1) より，

(1 - 27) $\quad x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$

は (1-24) の解である．

**問題 1 - 11** (1) $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を (1-24) の異なる 2 つの解とするとき，$\{\lambda_1\}$ , $\{\lambda_2\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を (1-24) の異なる 2 つの解とするとき，(1-24) の任意の解 $\{x_n\}$ に対して，$x_n$ を $\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $x_0$ , $x_1$ を用いて表わせ．この結果，$\{\{\lambda_1^n\}$ , $\{\lambda_2^n\}\}$ が (1-24) の解空間の 生成系 になっていることが分かる．

以上より，$\{\{\lambda_1^n\}$ , $\{\lambda_2^n\}\}$ も (1-24) の解空間の 基底 となっていることが分かる．

$\lambda_1 = \lambda_2$ **のとき**

$\{\lambda_1^n\}$ は (1-24) の解であるが，$\{\lambda_2^n\}$ は $\{\lambda_1^n\}$ と同じものであるので，$\{\lambda_1^n\}$ , $\{\lambda_2^n\}$ は 1 次独立ではない (1 次従属 である)．(1-24) の解空間は 2 次元であることは問題 1-10 からわかっているので，基底を構成するものは一つ足りない．

**問題 1 - 12** (1) (1-26) が重根を持つとき，$\{n\lambda_1^n\}$ は (1-24) の解であることを示せ．

(2) (1-26) が重根を持つとき，$\{\lambda_1^n\}$ , $\{n\lambda_1^n\}$ は 1 次独立 であることを示せ．

(3) (1-26) が重根を持つとき (1-24) の任意の解 $\{x_n\}$ に対して，$x_n$ を $\lambda_1$ , $x_0$ , $x_1$ を用いて表わせ．この結果，$\{\{\lambda_1^n\}$ , $\{n\lambda_1^n\}\}$ が (1-24) の解空間の 生成系 になっていることが分かる．

以上より，$\{\{\lambda_1^n\}$ , $\{n\lambda_1^n\}\}$ が (1-24) の解空間の 基底 となっていることが分かる．

問題 10-11 と問題 10-12 より，(1-26) が異なる解 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を持つときは，(1-24) の任意の解は $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ において適当に $C_1, C_2$ を選ぶことによって得られ，(1-26) が重根 $\lambda_1$ を持つときは，(1-24) の任意の解は $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n$ において適当に $C_1, C_2$ を選ぶことによって得らることがわかる．このように差分方程式のすべて (ほとんど) の解が任意定数 $C_1, C_2$ を適当に選ぶことによって得られるような解を **一般解** と呼ぶ．

以上をまとめて，次の定理が得られる．

**定理 1 - 1** (1)　(1-26) が異なる解 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を持つとき，(1-24) の一般解は

(1 - 28)　$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$

で与えられる．

(2)　(1-26) が重根 $\lambda_1$ を持つときは，(1-24) の一般解は

(1 - 29)　$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n$

で与えられる．

**問題 1 - 13** (1)　Fibonacci の数列 (例 2) の差分方程式 $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ の一般解を求めよ．

(2)　Fibonacci の数列 (例 2:　$x_0 = 0$ , $x_1 = 1$) の一般項 $x_n$ を求めよ．

(3)　Fibonacci の数列 $\{x_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

を求めよ．

(4)　(黄金分割，黄金比)


AB : AP = AP : BP となるように点 P によって線分 AB を内分することを黄金分割といい，AB/AP を黄金比という．(3) で求めた極限値は黄金比と等しいことを確かめよ．

**問題 1 - 14**　次の差分方程式の一般解と初期値 $x_0 = 1$ , $x_1 = 2$ を満たす解を求めなさい．

(1)　$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$

(2)　$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$

(3)　$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$

(4)　$x_{n+2} + 3x_n = 0$

(5)　$x_{n+2} = \dfrac{3x_{n+1} - x_n}{2}$

(6)　$x_{n+2} = \dfrac{3x_{n+1} + 2x_n}{2}$

## 1.4 単独 2 階線型定数係数差分方程式の解法 (非同次方程式)

(1 - 23) $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f_n$

(1 - 24) $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$

(1-23) において，$f_n$ が恒等的に 0 でない場合に，方程式 (1-23) を解くことを試みよう．まず，単独 1 階線型定数係数差分方程式の場合と同じように，(1-23) の特殊解 $\hat{x}_n$ を求めて，同次方程式 (1-24) の一般解を加えることによって，(1-23) の一般解が求まることを確かめよう．

**問題 1 - 15** (1-23) の一つの特殊解を $\{\hat{x}_n\}$ とし，(1-23) の任意の解を $\{x_n\}$ とするとき，$y_n = x_n - \hat{x}_n$ は同次方程式 (1-24) を満たすことを示せ．

**$f_n = P(n)b^n$ のときの特殊解の見つけ方 ($P(n) : k$ 次多項式)**

(1) $b$ が特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解でないとき
$\hat{x}_n = Q(n)b^n$ の形で特殊解が見つけられる．$Q(n)$ は $P(n)$ と同じ次数の多項式

(2) $b$ が特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の単根のとき
$\hat{x}_n = nQ(n)b^n$ の形で特殊解が見つけられる．$Q(n)$ は $P(n)$ と同じ次数の多項式

(3) $b$ が特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の重根のとき
$\hat{x}_n = n^2Q(n)b^n$ の形で特殊解が見つけられる．$Q(n)$ は $P(n)$ と同じ次数の多項式

**問題 1 - 16** 次の差分方程式の特殊解と一般解を求めなさい．

(1) $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n + 2^n$

(2) $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + n$

(3) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n$

(4) $x_{n+2} + 3x_n = n + 3$

(5) $x_{n+2} = \dfrac{3x_{n+1} - x_n}{2} + 2n$

(6) $x_{n+2} = \dfrac{3x_{n+1} + 2x_n}{2} + n2^n$

## 1.5　1 階連立差分方程式

**例 6，例 7，例 8，例 10，例 11** のように次の形をした 1 階連立差分方程式

(1 - 30)
$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = f_1(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \cdots, x_n^{(m)}) \\ x_{n+1}^{(2)} = f_2(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \cdots, x_n^{(m)}) \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n+1}^{(m)} = f_m(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \cdots, x_n^{(m)}) \end{cases}$$

を考える．これを記述を簡単にするために次のようにベクトル表示しよう．

(1 - 31)　$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{f}(n, \boldsymbol{x}_n)$

ここで，

(1 - 32)
$$\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{f}(n, \boldsymbol{x}_n) = \begin{bmatrix} f_1(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \cdots, x_n^{(m)}) \\ f_2(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \cdots, x_n^{(m)}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_m(n, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \cdots, x_n^{(m)}) \end{bmatrix}$$

一般に単独の $m$ 階差分方程式

(1 - 33)　$x_{n+m} = f(n, x_{n+m-1}, x_{n+m-2}, \cdots, x_{n+1}, x_n)$

は

(1 - 34)　$x_n = y_n^{(1)} \quad , \quad x_{n+1} = y_n^{(2)} \quad , \quad x_{n+2} = y_n^{(3)} \quad , \quad \cdots \quad , \quad x_{n+m-1} = y_n^{(m)}$

とおくと，$\boldsymbol{y}_n = {}^t[y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \cdots, y_n^{(m)}]$ についての 1 階連立差分方程式

(1 - 35)
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = x_{n+1} = y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} = x_{n+2} = y_n^{(3)} \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n+1}^{(m)} = x_{n+m} = f(n, x_{n+m-1}, x_{n+m-2}, \cdots, x_{n+1}, x_n) \\ \qquad\qquad\quad = f(n, y_n^{(m)}, y_n^{(m-1)}, \cdots, y_n^{(2)}, y_n^{(1)}) \end{cases}$$

に帰着できる．

これを整理して，

(1 - 36)
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} = y_n^{(3)} \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n+1}^{(m)} = f(n, y_n^{(m)}, y_n^{(m-1)}, \cdots, y_n^{(2)}, y_n^{(1)}) \end{cases}$$

**問題 1 - 17**　単独 2 階線型定数係数差分方程式 $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=f_n$ を 1 階連立差分方程式に帰着しなさい．

**問題 1 - 18**　**例 14(Mandelbrot Set)** において，複素数列 $z_n = x_n + y_n i$ ， 複素数 $\alpha = a+bi$ と実数表示して，${}^t[x_n\ ,\ y_n]$ についての連立 1 階差分方程式を作りなさい．

また，**例 15(Julia Set)** の場合においても $C = C_1 + C_2 i$ とおいて，同様のことをしなさい．

## 1.6　連立 1 階線型定数係数差分方程式の解法 (同次方程式のとき)

ここでは，連立 1 階線型定数係数差分方程式

(1 - 37)　$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{f}_n$

を考えよう．ここで, $A$ は与えられた $m$ 次正方行列で，その各成分は定数とっする． $\boldsymbol{f}_n$ は与えられた $m$ 次元ベクトル列とし，$\boldsymbol{x}_n$ は未知の $m$ 次元ベクトル列とする．1 階の連立差分方程式の解は，初項 $\boldsymbol{x}_0$ が与えられれば，$\boldsymbol{x}_1$ , $\boldsymbol{x}_2$ , $\boldsymbol{x}_3$ , $\cdots$ が一意的に定まっていく．

最初は **同次方程式 ( $\boldsymbol{f}_n \equiv \boldsymbol{0}$ の場合)** のときを考える．

(1 - 38)　$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$

**問題 1 - 19** (1)　$\{\boldsymbol{y}_n\}$ , $\{\boldsymbol{z}_n\}$ を (1-38) の 2 つの解とするとき，それらの 1 次結合 $\{C_1\boldsymbol{y}_n + C_2\boldsymbol{z}_n\}$ もまた (1-38) の解であることを示せ．このことは同次差分方程式 (1-38) の解全体はベクトル空間[2] の部分空間になっていることを示している．これを，同次方程式 (1-38) の **解空間** と呼ぶ．

(2)　$\{\boldsymbol{y}_n^1\ ,\ \boldsymbol{y}_n^2\ ,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{y}_n^m\}$ を

$$\boldsymbol{y}_0^1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{y}_0^2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\ ,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{y}_0^m = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

となる (1-38) の解としよう．このとき，(1-38) の任意の解 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に対して，$\boldsymbol{x}_n$ を

[2] ここでは全体のベクトル空間として無限ベクトル列全体を考えている

$$\boldsymbol{x}_n \text{ の 初期値 } \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{と } \boldsymbol{y}_n^1 \ , \ \boldsymbol{y}_n^2 \ , \ \cdots \ , \ \boldsymbol{y}_n^m$$

を用いて表わせ．この結果，$\{\boldsymbol{y}_n^1, \boldsymbol{y}_n^2, \cdots, \boldsymbol{y}_n^m\}$ が (1-37) の解空間の <u>生成系</u> になっていることが分かる．

(3) $\{\boldsymbol{y}_n^1, \boldsymbol{y}_n^2, \cdots, \boldsymbol{y}_n^m\}$ を (2) で与えた (1-38) の解としよう．このとき，

$$C_1\boldsymbol{y}_n^1 + C_2\boldsymbol{y}_n^2 + \cdots + C_m\boldsymbol{y}_n^m \equiv \boldsymbol{0}$$

であれば，$C_1 = C_2 = \cdots = 0$ であることを示せ．この結果，$\{\boldsymbol{y}_n^1, \boldsymbol{y}_n^2, \cdots, \boldsymbol{y}_n^m\}$ は <u>1 次独立</u> であることが分かり，これらより，$\{\boldsymbol{y}_n^1, \boldsymbol{y}_n^2, \cdots, \boldsymbol{y}_n^m\}$ は (1-38) の解空間の <u>基底</u> となり，この解空間は $m$ 次元であることがわかる．

(1-38) は

(1 - 39) $$\boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{x}_{n-1} = AA\boldsymbol{x}_{n-2} = AAA\boldsymbol{x}_{n-3} = \cdots = A^n\boldsymbol{x}_0$$

となる．$\boldsymbol{x}_n$ を具体的に求めるには，行列 $A$ の $n$ 乗 $A^n$ が計算できればよい．

$A^n$ を計算するために行列 $A$ を標準化 (対角化，Jordan の標準形) する．この方法についてはAppendix B で説明する．

正則行列 $P$ によって，$A$ が対角化できたとしよう，すなわち，

(1 - 40) $$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$A = PDP^{-1}$ より，

(1 - 41) $$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

また，

(1 - 42) $$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & & \\ & \lambda_2^n & & 0 & \\ & & \lambda_3^n & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m^n \end{bmatrix}$$

となるので，

$$(1\text{ - }43)\qquad A^n = P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & & \\ & \lambda_2^n & & 0 & \\ & & \lambda_3^n & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

と書ける．

また，対角化できない行列も，次のような Jordan の標準形にできる．すなわち，正則な行列 $P$ があって，

$$(1\text{ - }44)\qquad P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & 0 & \\ & & J_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & J_s \end{bmatrix},\ \text{ここで}, J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

すると，

$$(1\text{ - }45)\qquad A^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1})(PJP^{-1})\cdots(PJP^{-1}) = PJ^nP^{-1}$$

$$(1\text{ - }46)\qquad J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & & & & \\ & J_2^n & & 0 & \\ & & J_3^n & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & J_m^n \end{bmatrix}$$

となる．

$$(1\text{ - }47)\qquad N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと，

$$(1\text{ - }48)\qquad J_i = \lambda_i I + N_i$$

となり，$\lambda_i I$ と $N_i$ とは可換なので，

$$(1\text{ - }49)\qquad J_i^n = \lambda_i^n I + {}_nC_1\lambda_i^{n-1}N_i + {}_nC_2\lambda_i^{n-2}N_i^2 + \cdots + {}_nC_nN_i^n$$

ここで，$J_i$ を $m_i$ 次正方行列とすると，$k \geq m_i$ であれば，$N_i^k = O$ となっている．