

コンピュータ数学 仮想試験問題

1. 関数 $f(x) = \tan^{-1} x - x + 1$ について、以下の問に答えなさい。

(1) $y = f(x)$ のグラフを描くプログラムを作りなさい。ただし十進 BASIC では、 $\tan^{-1} x$ は $\text{ATN}(x)$ と表される。また、角度の単位はラジアンとしなさい。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解を近似するプログラムを 2 分法で求めるプログラムを作りなさい。ただし、誤差が 10 万分の 1 より小さくなるようにしなさい。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解を近似するプログラムを割線法 (セカント法) で求めるプログラムを作りなさい。

(4) 方程式 $f(x) = 0$ の解を近似するプログラムを Newton 法で求めるプログラムを作りなさい。

2. (1) 半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って内側を、滑らせずに回転させるとき、円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 内サイクロイド (hypocycloid) という。これは次のように媒介変数表示される。(ただし、 $b < a$)

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b} \theta \\ y = (a - b) \sin \theta - b \sin \frac{a-b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow \beta$$

$a = 1$, $b = \frac{1}{4}$ として、これを描くプログラムを作りなさい。(ただし、媒介変数は θ の代わりに t を用いなさい)

(2) 曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ のグラフを $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ のグラフと $y = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ のグラフを同じ座標に描くことによって得られる。これを描くプログラムを作りなさい。

(3) (1) の曲線と (2) の曲線を同じ座標で描くプログラムを作りなさい。

(4) (1) の曲線と (2) の曲線は同じものであることを数学的に示しなさい。

3. $y = f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ の定積分 $S = \int_{-1}^1 f(x) dx$ について，以下の問に答えなさい．

(1) この定積分 S を数学的に計算しなさい．

(2) この定積分 S を台形公式で近似値を計算しなさい．(区間を 1000 等分しなさい)

(3) x を区間 $[-1, 1]$ の一様乱数， y を区間 $[0, 2]$ の一様乱数を取り，点 (x, y) を対応させる．これを 10 万回実験し，点 (x, y) が曲線 $y = f(x)$ より下にある回数を数え，その割合からこの定積分 S の近似値を計算するプログラムを作りなさい．区間 $[-1, 1]$ の一様乱数は $x=2*\text{RND}-1$ ，区間 $[0, 2]$ の一様乱数は $y=2*\text{RND}$ とすれば得られる．

(4) (3) のプログラムに加えて，グラフィック画面に点を打つプログラムを作りなさい．ただし，点が曲線より上にあるときは黄色で，下にあるときは青で点を打つようにしなさい．

(5) 区間 $[-1, 1]$ の一様乱数列を

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

とし， N を十分大きく取ると，

$$\frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) dx \doteq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N)}{N}$$

となる．このことを用いてこの定積分 S の近似値を計算するプログラムを作りなさい．

4. $f(x, y) = (x + y)^4 + 100(x^2 - y^2)^2 + (x - y)^4 - 16 = 0$

で定まる曲線は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_y(x, y) & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -f_x(x, y) & y(0) = y_0 \end{cases}$$

を満たしている．ただし， (x_0, y_0) は曲線上の点とする．このことを用いて，この曲線を描くプログラムを作りなさい．ただし，微分方程式の近似解法は Cauchy-Euler 法 ($h = 0.001$ とせよ) を用いなさい．また，座標系をうまく定めなさい．($(1, 1)$ はこの曲線上の点である)

5. (捕食者-被食者モデル：Lotka-Volterra の微分方程式)

海の特定期域におけるサメに食べられるある種の魚 (fish) の個体数を x 億匹，同区域におけるサメ (shark) の個体数を y 万匹とするととき，それらは次の微分方程式に従っているとする．

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - bx - cy)x \\ \frac{dy}{dt} = (-k + \lambda x)y \end{cases}$$

ここで， $a = 1.2$ ， $b = 0.01$ ， $c = 0.19$ ， $k = 0.6$ ， $\lambda = 0.5$ とし，現在 ($t = 0$)，サメが 1 万匹 ($y = 1$)，サメに食べられる魚が 1 億匹 ($x = 1$) とするとき，将来それらの個体数 x と y がどうなるかを描くプログラムを作りなさい．ただし，微分方程式の近似法としては，Cauchy-Euler の折れ線法を用いなさい．横軸に x を，縦軸に y をとりなさい．また， $h = 0.0005$ ， $0 \leq t \leq 100$ とし，グラフィックの範囲は $-1 \leq x \leq 6$ ， $-2 \leq y \leq 20$ (すなわち，SET WINDOW -1,6,-2,20) としなさい．