

0 「コンピュータ数学」の講義について

この講義の目的はコンピュータを用いて、数学をより深く理解することです。取り扱う内容は

I 関数のグラフ (いろいろな曲線)

$y = f(x)$ の形, 媒介変数表示された曲線, 曲座標表示された曲線

陰関数表示 ($f(x, y) = 0$) された曲線は難しいのでそのままでは扱わない
名前のついた (有名な) 曲線

II 数値計算 (近似値の計算)

Taylor の定理 (Maclaurin の定理) の応用

Newton 法 (方程式の解の近似)

積分の近似値 (台形公式, Simpson の公式)

III 乱数を用いるシミュレーション

擬似乱数の発生法

単純なモンテカルロ法 (乱数を発生させて積分の近似値を求める)

乱歩 (=酔歩=ランダムウォーク)

IV 差分方程式 (数列の漸化式) の解の挙動

V 微分方程式の解の挙動

VI その他 (フラクタル図形, ライフゲームなど)

に關することを考えている。(予定変更あり)

教材はプリントをインターネットにて配布する。PDF ファイルなので, Acrobat Reader が必要 (たいていのパソコンにはインストールされている)

この授業のホームページのアドレスは

<http://kitty-shiro.sakura.ne.jp/>

mail address : ibuki@econ.u-hyogo.ac.jp

k.ibuki@ezweb.ne.jp(携帯からのメールのみ受信可)

使用するプログラミング言語は『(仮称) 十進 BASIC』(文教大学 白石和夫氏作) を用いる。これを用いる理由は

- ・他のプログラミング言語に比べて, 気楽に使える.
- ・無料で使用できる (次のホームページから download できる).

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

- ・グラフィックが簡単に使える.

講義の方法については受講者の数やアンケートを見て進めていく.

1 十進 BASIC の使い方について

1.1 インストール

- 1) 次のホームページより download する (Yahoo や Google などの検索ページにて「十進 BASIC」で検索してこのページにいてもよい)

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

- 2) download した『BASIC701setup.exe』をダブルクリックして指示に従う。(USB フラッシュメモリにインストールするとよい)
- 2') デスクトップまたは USB メモリに『十進 BASIC』という名前のフォルダを作り、そこへ download した『BASIC594.EXE』を移動またはコピーする。『BASIC594.EXE』は自己解凍ファイルになっているので、これをダブルクリックし、保存先を聞かれたら、すぐに「OK」をクリックしないで、『参照ボタン』を押すと、『十進 BASIC』フォルダが指定されるので、そこで『OK』ボタンをクリックし、解凍する。(もう、圧縮ファイルの『BASIC594.EXE』は不要)
- 3) 『十進 BASIC』の起動は解凍された『BASIC.EXE』をダブルクリック

1.2 十進 BASIC の基本の基本

- 1) プログラムは通常、上から順に実行される。
プログラム実行の最後には「END」が必要
- 2) 文字列定数以外は英字の大文字小文字は区別されない (どちらを用いてもよい)
- 3) 変数名は英字に、英字、数字、または_を続けたものを用いる。
また、文字列変数 (文字列を代入するための変数) には末尾に「\$」をつける。

- 4) 代入文 LET_変数名=定数または式 (LET は必ず必要)

INPUT_変数名

INPUT_PROMPT_"メッセージ":変数名

- 5) 数値演算 足し算 + 引き算 - 掛け算 * 割り算 /
乗乗 ^ 2⁵ は 2⁵

演算のカッコは何重になっても丸カッコ () のみを用いる

- 6) 出力文 PRINT_定数または式

PRINT_定数または式,

(コンマで終われば改行せずに間隔をあけて表示)

PRINT_定数または式;

(セミコロンで終われば改行せずに間隔をあけずに表示)

コンマやセミコロンで区切って、複数個表示することもできる.

7) 困ったときにはヘルプ機能で調べる

プログラム例 01

```
LET a=2
LET b=5
LET c$="University of Hyogo"
LET d$="Kobe University of Commerce"
PRINT a+b,a-b,a*b,a/b
PRINT c$
PRINT d$
END
```

プログラム例 02

```
INPUT PROMPT "x=(x>0)":x
INPUT PROMPT "y=":y
PRINT "x+y=";x+y,"x-y=";x-y,"x^y=";x^y
END
```

1.3 ループ (繰り返し)

(I) FOR ~ NEXT 文

```
FOR 変数=数値 1 TO 数値 2 [STEP 数値 3]
  命令 1
  命令 2
  ...
NEXT 変数
```

変数が数値 1 から数値 2 を越えるまで数値 3 の間隔で増加しながら、各命令の実行を繰り返す. (途中でループから抜け出すときは EXIT FOR)

『入れ子』になってもよい.

プログラム例 03

```
FOR x=1 TO 10
  print x,"KOBE"
NEXT x
END
```

プログラム例 04(1 から 10 まで足すプログラム)

```
LET S=0
FOR x=1 TO 10
  LET S=S+x
NEXT x
PRINT S
END
```

問題 1 INPUT 文を用いて, 1 から n まで足すプログラムにプログラム例 04 を変更しなさい.

問題 2 上の問題 1 を変更追加して次の式を計算するプログラムを作りなさい.

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

(2) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(3) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

(4) $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$

(5) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

問題 3 次の数列の漸化式を計算するプログラムを作りなさい.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

$$a_1 = 2$$

$a_2, a_3, \cdots, a_{100}$ を表示させなさい.

(II) DO WHILE ～ LOOP 文 (前判定反復)

DO WHILE 条件

命令 1

命令 2

...

LOOP

条件が満たされている間は各命令を繰り返す. (途中でループから抜け出すときは EXIT DO)
ループに入る前に条件をチェックするので, 条件が真でなければ 1 回も実行されない.

条件について

- (1) $\neq$ は『<>』または『><』
- (2) $\geq$ は『>=』または『=>』
- (3) $\leq$ は『<=』または『=<』
- (4) 複数の条件は『AND』, 『OR』で結ぶ.
- (5) 否定の条件は『NOT』.

プログラム例 05(1 から 10 まで足すプログラム)

LET S=0

LET X=1

DO WHILE X<=10

命令 LET S=S+X

命令 LET X=X+1

LOOP

PRINT S

END

(III) DO ～ LOOP WHILE 文 (後判定反復)

DO

命令 1

...

LOOP WHILE 条件

条件が満たされている間は各命令を繰り返す. (途中でループから抜け出すときはEXIT DO)
ループに入った後で条件をチェックするので, 条件が真でなくても 1 回は実行される.

(IV) DO ~ LOOP UNTIL 文 (後判定反復)

```
DO
  命令 1
  ...
LOOP UNTIL 条件
```

条件が真になるまで (偽の間は) 各命令を繰り返す.

(V) DO UNTIL ~ LOOP 文 (前判定反復)

```
DO UNTIL 条件
  命令 1
  ...
LOOP
```

条件が真になるまで (偽の間は) 各命令を繰り返す.

プログラム例 06(自然数の割り算を引き算だけで行うプログラム)

```
INPUT PROMPT "割られる数 x=" : x
INPUT PROMPT "割る数 y=" : y
LET q=0
DO UNTIL x<y
  LET x=x-y
  LET q=q+1
LOOP
PRINT "商=" ; q
PRINT "余り=" ; x
END
```

DO UNTIL $x < y$ の代わりに, DO WHILE $x \geq y$ でもよい.

問題 4 ある国の人口は現在 1000 万人とします. この国では 1 年に人口は 3% ずつ増加します. 1 年後, 2 年後, 3 年後, ... の人口が何万人になるかを人口が 2000 万人を超えるまで計算するプログラムを作りなさい. (DO~LOOP~WHILE を用いなさい)

組込み関数について

- (1) ABS(x) x の絶対値 $|x|$
- (2) SQR(x) x の非負の平方根 $\sqrt{x}$
- (3) INT(x) x を超えない最大の整数 $[x]$ (Gauss の記号)
- (4) $\sin x \rightarrow \text{SIN}(x)$ $\cos x \rightarrow \text{COS}(x)$ $\tan x \rightarrow \text{TAN}(x)$
 $\sin^{-1} x \rightarrow \text{ASIN}(x)$ $\cos^{-1} x \rightarrow \text{ACOS}(x)$ $\tan^{-1} x \rightarrow \text{ATN}(x)$
- (5) $e^x \rightarrow \text{EXP}(x)$ $\log_e x \rightarrow \text{LOG}(x)$ $\log_{10} x \rightarrow \text{LOG10}(x)$
- (6) RND 関数 $0 \leq \text{RND} < 1$ となる一様乱数を与える.
 最初に異なる乱数からはじめるためには, 予め RANDOMIZE 文が必要.

問題 5 問題 3 は $\sqrt{2}$ を近似するプログラムですが, 誤差が 10^{-10} より小さくなるまで計算させるプログラムを作りなさい. (DO~LOOP~WHILE を用いなさい)

$\sqrt{2}$ は SQR(2), $a_n > \sqrt{2}$ が分かっているので, 誤差は $a_n - \sqrt{2}$ である. また 10^{-10} は $10^(-10)$ とする.

1.4 条件分岐

(I) 単純 IF 文 (1 行で記述)

IF 条件 THEN 命令

条件が真であれば命令を実行する. 条件が偽であれば命令は実行されず次の行へ行く.

IF 条件 THEN 命令 1 ELSE 命令 2

条件が真であれば命令 1 を実行し, 条件が偽であれば命令 2 を実行する.

(II) IF ~ THEN ~ END IF 文 (複数行で記述)

IF 条件 THEN

命令 1

命令 2

...

END IF

条件が真であれば各命令を実行する。条件が偽であれば命令は実行されず END_IF の次の行へ行く

(III) IF ～ THEN ～ ELSE ～ END IF 文 (複数行で記述)

```
IF_条件_THEN
```

```
    _命令 1
```

```
ELSE
```

```
    _命令 3
```

```
END_IF
```

条件が真であれば命令 1 を実行する。条件が偽であれば命令 3 を実行する。

(IV) ELSEIF

```
IF_条件 1_THEN
```

```
    _命令 1
```

```
ELSEIF_条件 2_THEN
```

```
    _命令 2
```

```
ELSE
```

```
    _命令 3
```

```
END_IF
```

条件 1 が真であれば命令 1 を実行する。条件 1 が偽で条件 2 が真であれば命令 2 を実行する。条件 1 も条件 2 も偽であれば命令 3 を実行する。

プログラム例 07(平方根)

```
INPUT_PROMPT_"x":x
```

```
IF_x>=0_then
```

```
    _PRINT_SQR(x)
```

```
ELSE
```

```
    _PRINT_"±";SQR(-x);"i"
```

```
END_IF
```

```
END
```


プログラム例 08(1 次方程式 $ax = b$ の解)

```
INPUT PROMPT "a=" : a
INPUT PROMPT "b=" : b
IF a <> 0 THEN
  LET x = b / a
  PRINT "x=" ; x
ELSEIF b = 0 THEN
  PRINT "不定 (無数の解)"
ELSE
  PRINT "解なし"
END IF
END
```

プログラム例 09(数当てゲーム)

```
RANDOMIZE
LET X = INT(RND * 10)
DO
  INPUT A
  LOOP WHILE X <> A
  PRINT "当たり"
END
```

問題 6 上の数当てゲームのプログラムを次のように変更しなさい.

- (1) 0~999 の整数を当てるプログラムに変更しなさい.
- (2) $X > A$ のときは「もっと大きい」、 $X < A$ のときは「もっと小さい」と表示させるようにしなさい.
- (3) 当たったときに何回目で当たったかを表示させなさい.

(V) 無限ループとループからの脱出

```
DO
```

```
  〇〇〇 ・・・・・
```

```
LOOP
```

のように WHILE や UNTIL がなくても、DO〇～〇LOOP を用いてよいが、このままでは、繰り返しが無限回になってしまう。あるいは、WHILE や UNTIL のある DO〇～〇LOOP 文や FOR〇～〇NEXT 文においても途中でループを抜け出したい場合がある。このような場合には、EXIT〇DO や EXIT〇FOR を用いて、ループを抜け出すことができる。

プログラム例 10(数当てゲーム 2)

```
RANDOMIZE
```

```
LET〇X=INT(RND*10000)
```

```
LET〇k=0
```

```
DO
```

```
  〇〇〇 INPUT〇A
```

```
  〇〇〇 LET〇k=k+1
```

```
  〇〇〇 IF〇X=A〇 THEN
```

```
    〇〇〇〇〇〇 PRINT〇k;"回目で当たりました"
```

```
    〇〇〇〇〇〇 EXIT〇DO
```

```
  〇〇〇 ELSEIF〇X>A〇 THEN
```

```
    〇〇〇〇〇〇 PRINT〇k;"回目    もっと大きい"
```

```
  〇〇〇 ELSE
```

```
    〇〇〇〇〇〇 PRINT〇k;"回目    もっと小さい"
```

```
  〇〇〇 END〇IF
```

```
LOOP
```

```
END
```

(VI) 多重ループ

FOR_␣～_␣NEXT 文や DO_␣～_␣LOOP 文は 2 重, 3 重に用いることが出来る. 使い方については後で具体例で示すことにするが, EXIT_␣FOR や EXIT_␣DO を用いてループから抜け出せるのは, すぐ外のループにしか抜け出せない. もっと外のループに抜け出すには GOTO 文を用いる. GOTO 文は余り使わない方がよい (=分かりやすい) とされている.

GOTO_␣行番号 : プログラムの実行を指定された行番号の行に移動する.

行番号は付けたい行の先頭に自然数を用い, 下の行ほど大きい番号を付けなければならない. 行番号の直後には半角のスペースが必要である.

1.5 グラフィックについて

(I) 座標系の設定

SET WINDOW $\square\square$ 左端座標 $\square$, $\square$ 右端座標 $\square$, $\square$ 下端座標 $\square$, $\square$ 上端座標

(II) 点を描く

PLOT POINTS: $\square$ x 座標 $\square$, $\square$ y 座標

予め、打つ点のスタイルを次の命令で定めておく.

SET POINT STYLE 数値式

マークの形 (point style) を設定する.

1 . 2 + 3 * 4 ○ 5 ×

(III) 線を描く

PLOT LINES: $\square$ x1 $\square$, y1 $\square$; $\square$ x2 $\square$, y2

(x_1, y_1) から (x_2, y_2) までを線分で結ぶ.

線の色やスタイルを指定したい場合は次の命令で行う.

SET LINE COLOR 数値式

色は 0 から 255 までが利用でき、あらかじめ次のように割り当てられている.

0 白, 1 黒, 2 青, 3 緑, 4 赤, 5 水色, 6 黄色, 7 赤紫, 8 灰色, 9 濃い青,
10 濃い緑, 11 青緑, 12 えび茶, 13 オリーブ色, 14 濃い紫, 15 銀色, ...

SET LINE STYLE 数値式

線の種類は, 1 実線, 2 破線, 3 点線, 4 一点鎖線

(IV) 円を描く

DRAW circle (現在の line color で原点を中心とする半径 1 の円を描く)

点 (x, y) を中心とする半径 r の円を描きたいときは,

DRAW circle WITH SCALE(r)*SHIFT(x, y)

(V) 座標軸や格子を描く

DRAW AXES (x 軸と y 軸を描く)

DRAW GRID (x 軸方向 間隔 1, y 軸方向 間隔 1 の格子を描く)

(VI) 画面消去

CLEAR

(VII) 色を塗る

FLOOD $\square$ x, y (点 (x, y) を始点として点 (x, y) と同色でつながる領域を現在の area color で塗りつぶす.)

PAINT $\square$ x, y (点 (x, y) を始点として line color の点を境界とする領域を現在の area color で塗りつぶす)

塗りつぶす色の色の設定は

SET $\square$ AREA $\square$ COLOR $\square$ 数値式

プログラム例 11(グラフィック)

```
SET  $\square$ WINDOW  $\square$ -3, 3, -3, 3
PLOT  $\square$ LINES: -2, -2; 2, -2; 2, 2; -2, 2; -2, -2
PLOT  $\square$ LINES: -2, -2; 2, 2
PLOT  $\square$ LINES: -2, 2; 2, -2
DRAW  $\square$ circle  $\square$ WITH  $\square$ SCALE(2)
PLOT  $\square$ POINTS: 0, 2.5
SET  $\square$ AREA  $\square$ COLOR  $\square$ 6
paint  $\square$ 1, 0
END
```

プログラム例 12(2重ループ)

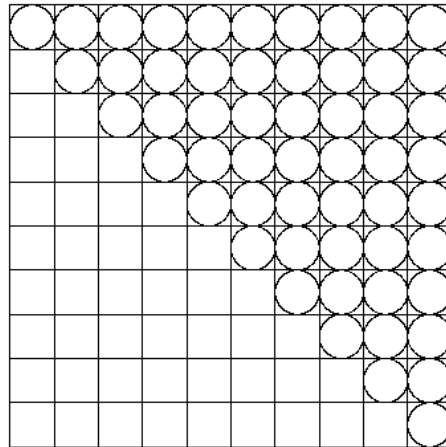
```
SET  $\square$ WINDOW  $\square$ -3, 3, -3, 3
PLOT  $\square$ LINES: -2, -2; 2, -2; 2, 2; -2, 2; -2, -2
FOR  $\square$ x = -2  $\square$ TO  $\square$ 2  $\square$ STEP  $\square$ 0.4
   $\square$  $\square$  PLOT  $\square$ LINES: x, -2; x, 2
NEXT  $\square$ x
FOR  $\square$ y = -2  $\square$ TO  $\square$ 2  $\square$ STEP  $\square$ 0.4
   $\square$  $\square$  PLOT  $\square$ LINES: -2, y; 2, y
NEXT  $\square$ y
FOR  $\square$ x = -2 + 0.2  $\square$ TO  $\square$ 2  $\square$ STEP  $\square$ 0.4
   $\square$  $\square$  FOR  $\square$ y = -2 + 0.2  $\square$ TO  $\square$ 2  $\square$ STEP  $\square$ 0.4
     $\square$  $\square$  $\square$  DRAW  $\square$ circle  $\square$ WITH  $\square$ SCALE(0.2) * SHIFT(x, y)
   $\square$  $\square$  NEXT  $\square$ y
NEXT  $\square$ x
END
```

問題 7 プログラム例 12 の 6 行目を次のように変更しなさい.

`FOR y=-2+0.2 TO 2 STEP 0.4` を `FOR y=-2+0.2 TO x STEP 0.4`

問題 8 プログラム例 12 を変更して次のようなプログラムを作りなさい.

- (1) 100 個の小円を黄色で塗りつぶしなさい.
- (2) 100 個の小円をランダムな色 (色指標 0~255) で塗りつぶしなさい.
- (3) 100 個の小円を色指標 1~100 の色が順番に現れるように塗りつぶしなさい.
- (4) 次図のような 55 個の小円を描くプログラムを作りなさい.



- (5) (4) で描いた 55 個の小円をランダムな色 (色指標 0~255) で塗りつぶしなさい.

2 いろいろな曲線

2.1 $y = f(x)$ の形のグラフ

2.1.1 平行移動と伸縮

$y = f(x)$ のグラフを

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = f(x - p) + q$

原点を中心に x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍すると $y = bf(\frac{x}{a})$

$f(x, y) = 0$ のグラフを

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると $f(x - p, y - q) = 0$

原点を中心に x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍すると $f(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = 0$

2.1.2 関数 $y = f(x)$ のグラフを描くプログラム

プログラム例 13 ($y = x^2$ ($-3 \leq x \leq 3$) の graph)

```
SETWINDOW-3,3,-1,5
DRAWAXES
DEF f(x)=x^2
FOR x=-5 TO 5 STEP 0.1
  PLOT LINES: x, f(x);
NEXT x
END
```

十進 BASIC の追加説明 1

☆関数の定義 1

DEF 関数名 (変数)=変数の数式

☆ PLOT LINES 文の補足

PLOT LINES: x1, y1;

(終りがセミコロンで終わるときは紙の上にペンを置いたままの状態)

次の PLOT LINES の点までを線分で結ぶ

PLOT LINES: x1, y1

(終りがセミコロンで終わらないときは紙の上からペンを離れた状態)

PLOT LINES

(コロン以下がないときは, 単にペンを紙から離す)

プログラム例 14($y = \frac{1}{x}$ ($-3 \leq x \leq 3$) の graph)

```

SET_WINDOW -3,3,-3,3
DRAW_AXES
DEF f(x)=1/x
FOR x=-5 TO 5 STEP 0.1
  PLOT LINES:x,f(x);
NEXT x
END

```

プログラム例 14 は $x = 0$ のとき、0 が分母にくるためエラーが起こる。このようなエラーが起こるときは次のようなエラー処理を行うことによってエラーを回避できる。

プログラム例 14-2($y = \frac{1}{x}$ ($-3 \leq x \leq 3$) の graph)

```

SET_WINDOW -3,3,-3,3
DRAW_AXES
DEF f(x)=1/x
FOR x=-5 TO 5 STEP 0.1
  WHEN EXCEPTION IN
    PLOT LINES:x,f(x);
  USE
    PLOT LINES
  END WHEN
NEXT x
END

```

十進 BASIC の追加説明 2

☆エラー処理

```

  WHEN EXCEPTION IN
    命令 1
  USE
    命令 2
  END WHEN

```

命令 1 の中でエラーが生じれば命令 1 を行わず、命令 2 を行う。

問題9 次の関数のグラフがどのようなになるか数学的に考えよ．また，そのグラフを描くプログラムを作成し，実行せよ．(x の範囲には定義されない部分も含まれている．SET_WINDOW文によって適当な座標系を定め，なるべく縦と横の縮尺を同じにせよ)

$$(1) \quad y = f(x) = x^3 - x \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(2) \quad y = f(x) = x^4 - 2x^2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(3) \quad y = f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(4) \quad y = f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(5) \quad y = f(x) = x - \frac{1}{x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(6) \quad y = f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$(7) \quad y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(8) \quad y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (-3 \leq x \leq 3)$$

$$(9) \quad y = f(x) = \sin x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(10) \quad y = f(x) = \cos x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(11) \quad y = f(x) = x \cos \frac{1}{x} \quad (-0.1 \leq x \leq 0.1)$$

$$(12) \quad y = f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(13) \quad y = f(x) = f(x) = \sin 11x + \sin 12x \quad (-10 \leq x \leq 10)$$

$$(14) \quad y = f(x) = \tan^{-1} x \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

$$(15) \quad y = f(x) = \tan x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(16) \quad y = f(x) = 2^x \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(17) \quad y = f(x) = 2^{-x} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(18) \quad y = f(x) = \log_2 x \quad (0 \leq x \leq 7)$$

$$(19) \quad y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(20) \quad y = f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

2.2 曲線の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t: \alpha \longrightarrow \beta$$

t が α から β まで変化するとき, $(f(t), g(t))$ を座標とする点 P は xy 平面上を動き, その軌跡は曲線となる. 上のような表示をこの曲線の 媒介変数表示 あるいは para-meter 表示 といい, このときの変数 t を 媒介変数 (para-meter) という. また, 点 $(f(\alpha), g(\alpha))$ を 始点, 点 $(f(\beta), g(\beta))$ を 終点 という.

例 1(cycloid)

半径 a の円板をある直線に沿って, 滑らずに回転させるとき, 円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を サイクロイド (cycloid) という. サイクロイドは次のように媒介変数表示される.

$$\begin{cases} x = a\theta - a \sin \theta \\ y = a - a \cos \theta \end{cases} \quad \theta: 0 \longrightarrow \beta$$

プログラム例 15(cycloid)

```
SET WINDOW -1,7,-1,7
DRAW AXES
DEF f(t)=t-SIN(t)
DEF g(t)=1-COS(t)
FOR t=0 TO 8 STEP 0.01
  PLOT LINES: f(t), g(t);
NEXT t
END
```

例 2(epicycloid)

半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って外側を, 滑らずに回転させるとき, 円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 外サイクロイド (epicycloid) という. これは次のように媒介変数表示される.

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b} \theta \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta: 0 \longrightarrow \beta$$

例 3(hypocycloid)

半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って内側を，滑らずに回転させるとき，円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 内サイクロイド (hypocycloid) という．これは次のように媒介変数表示される．（ただし， $b < a$ ）

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b} \theta \\ y = (a - b) \sin \theta - b \sin \frac{a-b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow \beta$$

例 4(リサージュ (Lissajous) 曲線)

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad t : 0 \longrightarrow \beta$$

あるいは

$$\begin{cases} x = A \cos(at) \\ y = B \sin(bt + \delta) \end{cases} \quad t : 0 \longrightarrow \beta$$

例 5(楕円と双曲線)

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

あるいは

$$\begin{cases} x = a \cosh t = a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \sinh t = b \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t : -\infty \longrightarrow \infty$$

問題 10 サイクロイド，エピサイクロイド，ハイポサイクロイドはいずれも，円周上の点の軌跡であったが，円周上にない場合（円の内部の点や外部の点の軌跡の場合）にはこれらをそれぞれ，トロコイド (trochoid)，エピトロコイド (epitrochoid)，ハイポトロコイド (hypotrochoid) という．これらの曲線を媒介変数表示し，それらを描くプログラムを作成して，コンピュータに描かせよ．

問題 11 円: $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$ に糸を巻き付け, それを引っ張りながら解いていくとき, 糸の端の点の描く曲線を媒介変数表示し, それを描くプログラムを作成して, コンピュータに描かせよ. ただし, 糸の端は, 最初は点 $(a, 0)$ にあるとせよ.

2.3 極座標と曲線

平面上の点 P の位置を表すのに, 今までは xy -座標を用いてきた. この他に次のような表し方もある. 平面上の定点 O と O から引いた半直線 OX を定めておく.

$$OP = r, \quad \angle XOP = \theta$$

とすると, 点 P の位置を (r, θ) とする. このような座標を 極座標 という. θ は時計と反対周りに一般角を考え, r が負の値の場合には,

$$OP' = |r|, \quad \angle XOP' = \theta$$

とすると, 点 P は P' と原点 O に関して対称な位置を表すことにする.

r と θ の関係式 $f(r, \theta) = 0$ は極座標において曲線を表す. この関係式を 極方程式 という.

また, OX を x 軸とし, O を通り, それに直交する直線を y 軸とすると, 2つの座標の間には次の関係がある.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \frac{\pi}{2} & (x = 0, y > 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{2} & (x = 0, y < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

例 6(直線)

原点を通る直線: $\theta = \alpha$ (α : 定数)

極座標が (r_0, α) で表される点 A を通り OA に直交する直線: $r \cos(\theta - \alpha) = r_0$

例 7(円)

原点を中心とし, 半径 r_0 の円: $r = r_0$ (r_0 : 定数)

極座標が (r_1, α) を中心とし, 半径 r_0 の円: $r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \alpha) - r_0^2 = 0$

例 8(アルキメデスの螺旋(らせん))

$$r = a\theta \quad (a > 0)$$

例 9(等角螺線, 対数螺線)

$$r = a^\theta \quad (a > 1)$$

例 10(正葉線)

$$r = a \sin n\theta \quad (a > 0, n \text{ は自然数})$$

例 11(Pascal のリマソン (limaçon=かたつむり))

$$r = a \cos \theta + b \quad (a > 0, b > 0)$$

$a = b$ のときは カージオイド (cardioid) という.

問題 12 例 8(アルキメデスの螺線) と例 9(対数螺線) のグラフを手で描いてみなさい.

問題 13 例 10(正葉線) のグラフを $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に手で描いてみなさい.

問題 14 例 11(Pascal のリマソン) のグラフを $a > b$, $a = b$, $b = 2a$ の各場合に手で描いてみなさい.

$r = f(\theta)$ のように書くことのできる極方程式の定める曲線は, 次のように媒介変数表示もできる.

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

問題 15 問題 4~問題 6 の各問題の曲線をコンピュータに描かせるプログラムを作成し, コンピュータに描かせなさい.

2.4 2次曲線**2.4.1 放物線**

定点 $F(p, 0)$ と直線: $x = -p$ からの距離が等しい点 $P(x, y)$ の軌跡は

$$\text{放物線: } y^2 = 4px$$

である. 定点 $F(p, 0)$ をこの放物線の 焦点, 直線: $x = -p$ を 準線 という.

放物線の極座標表示

座標軸を x 軸方向に平行移動し, 焦点 F が新しい原点になるようにする. 放物線の方程式は:

$$y^2 = 4p(x + p)$$

ここに, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入して, r について解くと,

$$r = \frac{2p}{1 - \cos \theta} \quad \text{あるいは} \quad r = \frac{-2p}{1 + \cos \theta}$$

これは2つとも同じ放物線を表すので、ここでは、

$$r = \frac{2p}{1 - \cos \theta}$$

を採用しよう.

問題 16 定点 $F(p, 0)$ と直線 $x = -p$ からの距離が等しい点 $P(x, y)$ の軌跡が $y^2 = 4px$ であることを確かめよ.

問題 17 方程式 $y^2 = 4p(x + p)$ に $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入して, r について解くと,

$$r = \frac{2p}{1 - \cos \theta} \quad \text{あるいは} \quad r = \frac{-2p}{1 + \cos \theta}$$

となることを確かめよ.

2.4.2 楕円

(I) 2つの定点 $F(c, 0)$ と $F'(-c, 0)$ からの距離の和が一定 $2a$ ($a > c > 0$) であるような点 $P(x, y)$ の軌跡を考える.

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

これを平方して, 4で割り, 整理すると,

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

さらに平方して, 整理すると,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ここで,

$$(a^2 - c^2) = b^2 \quad (b > 0)$$

とおき, a^2b^2 で割ると,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

が得られる. この曲線を 楕円 といい, 2つの定点 F と F' をこの楕円の 焦点 という. 焦点の座標は次のようになる.

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \quad , \quad F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

(II) 定点 $F(c, 0)$ と直線 $x = p$ からの距離の比が一定の値 e である点の軌跡を考えよう.

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-p|} = e$$

分母を払って平方し, 整理すると,

$$(1-e^2)x^2 - 2(c-e^2p)x + y^2 = e^2p^2 - c^2$$

ここで, x の 1 次の項がなくなるように,

$$c - e^2p = 0 \quad \text{すなわち, } p = \frac{c}{e^2}$$

とする.

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2}$$

$e < 1$ のとき, 両辺を右辺で割ると,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{e}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{c\sqrt{1-e^2}}{e}\right)^2} = 1$$

ここで,

$$a = \frac{c}{e}, \quad b = \frac{c\sqrt{1-e^2}}{e} \quad \left(c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)$$

とおくと,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

比 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ を 離心率, 直線 $x = p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ を焦点 $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ に対応する 準線 という.

焦点 $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, 準線 $x = -p = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ として, 同様に考えても, 同じ楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が得られる.

楕円の極座標表示

座標軸を x 軸方向に平行移動し, 焦点 $F'(-c, 0)$ が新しい原点になるようにする. このとき, 準線は $x = -p$ が採用される.

$$x + c = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これを

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{|x+p|} = e$$

に代入し、分母を払い、 $x + p > 0$ を考慮すると、

$$r = e(r \cos \theta - c + p) \quad \text{すなわち,} \quad r = \frac{e(p - c)}{1 - e \cos \theta} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e \cos \theta}$$

2.4.3 双曲線

(I) 2つの定点 $F(c, 0)$ と $F'(-c, 0)$ からの距離の差が一定 $2a$ ($c > a > 0$) であるような点 $P(x, y)$ の軌跡を考える.

$$|\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}| = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

これを平方して、4で割り、整理すると、

$$\mp a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

さらに平方して、整理すると、

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

ここで、

$$(c^2 - a^2) = b^2 \quad (b > 0)$$

とおき、 a^2b^2 で割ると、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

が得られる. この曲線を 双曲線 といい、2つの定点 F と F' をこの楕円の 焦点 という. 焦点の座標は次のようになる.

$$F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \quad , \quad F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

(II) 楕円の場合と同様に定点 $F(c, 0)$ と直線 $x = p$ からの距離の比が一定の値 $e > 1$ である点の軌跡を考えよう.

$$\frac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{|x - p|} = e$$

分母を払って平方し、整理すると、

$$(1 - e^2)x^2 - 2(c - e^2p)x + y^2 = e^2p^2 - c^2$$

ここで、 x の1次の項がなくなるように、

$$c - e^2 p = 0 \quad \text{すなわち, } p = \frac{c}{e^2}$$

とする.

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 = \frac{c^2(e^2 - 1)}{e^2}$$

両辺を右辺で割ると,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{e}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{c\sqrt{e^2 - 1}}{e}\right)^2} = 1$$

ここで,

$$a = \frac{c}{e}, \quad b = \frac{c\sqrt{e^2 - 1}}{e} \quad \left(c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

とおくと,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

比 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ を 離心率, 直線: $x = p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を焦点 $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ に対応する 準線 という.

焦点 $F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, 準線 $x = -p = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ として, 同様に考えても, 同じ双曲線: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ が得られる.

双曲線の極座標表示

座標軸を x 軸方向に平行移動し, 焦点 $F'(-c, 0)$ が新しい原点になるようにする. このとき, 準線は $x = -p$ が採用される.

$$x + c = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これを

$$\frac{\sqrt{(x + c)^2 + y^2}}{|x + p|} = e$$

に代入し, 分母を払い, $x + p > 0$ を考慮すると,

$$r = e(r \cos \theta - c + p) \quad \text{すなわち, } r = \frac{e(p - c)}{1 - e \cos \theta} = \frac{-\frac{b^2}{a}}{1 - e \cos \theta}$$

2.4.4 放物線・楕円・双曲線のまとめ

放物線： $y^2 = 4px$

- ・ 定点 (焦点) $F(p, 0)$ と直線 (準線)： $x = -p$ からの距離が等しい軌跡
- ・ 焦点を原点に取ったときの極方程式：

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta} \quad (l = 2p, e = 1)$$

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

- ・ 2つの定点 (焦点) $F(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ からの距離の和が一定 $2a$ であるような点の軌跡
- ・ 定点 (焦点) $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と直線 (準線)： $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ からの距離の比が一定 $e < 1$ である点の軌跡
- ・ 焦点 $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ を原点に取ったときの極方程式：

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta} \quad (l = \frac{b^2}{a}, e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$$

双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$

- ・ 2つの定点 (焦点) $F(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ からの距離の差が一定 $2a$ であるような点の軌跡
- ・ 定点 (焦点) $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ と直線 (準線)： $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ からの距離の比が一定 $e > 1$ である点の軌跡
- ・ 焦点 $F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ を原点に取ったときの極方程式：

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta} \quad (l = -\frac{b^2}{a}, e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a})$$

問題 18 極方程式： $r = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$ において、 $e = 1$ のときは放物線、 $0 < e < 1$ のときは楕円、 $e > 1$ のときは双曲線を描くことをコンピュータで確かめよ。

2.4.5 2次曲線の分類

$$(2-1) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

の関係式で表される曲線を 2次曲線 といい, それらは次のいずれかに分類される. (ただし, $|a| + |b| + |c| \neq 0$ とする)

- (i) 楕円
- (ii) 双曲線
- (ii) 放物線
- (iv) 交わる2直線
- (v) 平行な2直線
- (vi) 一つの直線
- (vii) 一つの点
- (viii) 満たす点なし

平行移動: $X = x + p$, $Y = y + q$ をすることによって, $h^2 \neq ab$ のときは,

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + c_1 = 0$$

のように変形できる. これを,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$$

と書こう. さらに座標軸の回転: $x = X \cos \theta - Y \sin \theta$, $y = X \sin \theta + Y \cos \theta$ をすることによって,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0$$

のように変形できる. これを,

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

と書こう.

問題19 $h^2 \neq ab$ のとき, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ を $aX^2 + 2hXY + bY^2 + c_1 = 0$ に変形されるように p, q を定めなさい.

問題20 $ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$ を $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0$ に変形されるように座標軸の回転角 θ をどのように定めたらよいか? また, このとき, λ_1, λ_2 は行列 $\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$ の固有値に等しいことを示しなさい.

$h^2 \neq ab$ のときには, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ となる. 必要なら両辺に, -1 をかけることによって, $\lambda_1 > 0$ としよう.

- (1) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c < 0$ のときは, 楕円: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に帰着される.
- (2) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c = 0$ のときは, 満たす点は原点 1 点のみ
- (3) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c > 0$ のときは, 満たす点なし
- (4) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, c \neq 0$ のときは, 双曲線: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ に帰着される.
- (5) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, c = 0$ のときは, 交わる 2 直線: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ に帰着される.

つぎに $h^2 = ab$ の場合を考えよう. $a > 0$ としてよい. ($a < 0$ のときは, (2-1) の両辺に -1 をかけて考える, $a = 0$ のときは, $b \neq 0$ なので, x と y の役割を入れ替えて考えよう)

座標軸の回転: $x = X \cos \theta - Y \sin \theta, y = X \sin \theta + Y \cos \theta$ をすることによって,

$$(a+b)Y^2 + 2FX + 2GY + c = 0$$

のように変形できる ($F \leq 0, a+b > 0$). これを,

$$(a+b)y^2 + 2Fx + 2Gy + c = 0$$

と書こう. さらに, y 方向の平行移動: $y = Y - q$ をすれば,

$$(a+b)Y^2 + 2FX + c_1 = 0$$

のように変形できる. これをまた,

$$(a+b)y^2 + 2Fx + c = 0$$

と書こう.

- (6) $F < 0$ のときは, x 方向の平行移動: $x = X - \frac{c}{2F}$ をすれば,

$$(a+b)Y^2 + 2FX = 0 \quad (\text{放物線: } y^2 = 4px \text{ の形})$$

- (7) $F = 0, c < 0$ のときは, $y = \pm \sqrt{-\frac{c}{a+b}}$ (平行な 2 直線)

- (8) $F = 0, c = 0$ のときは, $Y = 0$ (1 直線)

- (9) $F = 0, c > 0$ のときは, 満たす点なし

問題 21 $h^2 = ab$ のときに, 上記のように変形できることを確かめよ.

2.5 陰関数のグラフ

プログラムを用いて、 $f(x, y) = 0$ の形で、グラフを描かせることは難しい。ここでは、媒介変数表示に帰着できる曲線や、ある場合には後に述べる、微分方程式の解をプログラムを用いて描かせることに帰着できることを述べる。

例 12

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$

これを、コンピュータで描かせるために、媒介変数表示させたい。 $y = tx$ において、 x, y を t で表すと、

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

例 13(レムニスケート (lemniscate))

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

これは、極座標で表せるので、媒介変数表示できる。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入して、 r^2 で割ると、

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

微分方程式への帰着

$$f(x, y) = 0$$

が媒介変数表示 $x = x(t)$, $y = y(t)$ と媒介変数表示されているとしよう。すると、

$$f(x(t), y(t)) = 0$$

これを、 t で微分すると、

$$f_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_y(x, y) & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -f_x(x, y) & y(0) = y_0 \end{cases}$$

の解は、この曲線を表す。ただし、 (x_0, y_0) はこの曲線上の 1 点とする。このような微分方程式の近似解の計算の仕方は後に述べるが、この曲線が特異点を持つ場合にはうまくいかない。曲線の特異点とは、曲線上の点 (a, b) で、 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となる点のことで、上の例 13 や 14 においては原点が特異点になっている。

3 数値計算

誤差についての注意

丸め誤差 無限小数や有効桁数が多い数について、コンピュータは通常では多い桁を扱わないため、四捨五入・切り上げ・切捨てなどの数値を丸める操作(四捨五入・切り上げ・切捨てなど)を行う。このために生じる誤差

打ち切り誤差 数学では無限に加えるとか無限回の操作をすれば等しいというように考えることがあるが、コンピュータは有限回の操作しか行えない。そのために生じる誤差

誤差の累積 数学的には多くの操作をすれば、より正しい値に近くなることが多いが、コンピュータで計算する場合には、打ち切り誤差など小さな誤差が累積して逆に多くの操作の方が誤差が大きくなる場合がある。

3.1 Taylor の定理 (Maclaurin の定理) の応用

Taylor の定理

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

(c は a と x の間の数)

Maclaurin の定理

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

($0 < \theta < 1$)

Taylor 展開(無限級数)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Maclaurin 展開(無限級数)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Taylor 展開や Maclaurin 展開するためには x の範囲に制限がある。Maclaurin 展開を x 方向に平行移動すれば、Taylor 展開と同じになるので、ここでは Maclaurin の定理 (Maclaurin 展開) のみを扱う。

例 1 (Maclaurin 展開の例)

$$(1) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \text{ 自然数 } k \text{ に対して, } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ とおくと,}$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(4) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(5) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(6) \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

近似公式

$$f(x) \doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

x が 0 に近いほど, n が大きいほどよい近似値を与える.

また, このとき数学的な誤差 E は

$$E = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \text{ または, } E = \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \cdots \right|$$

例 2 ($\sqrt{2}$ などの近似値) 上記の例 1 の (1) において, $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 4$ とすれば,

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}x^4$$

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{10}\sqrt{200} = \frac{1}{10}\sqrt{14^2 + 4} = \frac{14}{10}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$$

$$\sqrt{2} \div \frac{14}{10} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{49} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{49} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{49} \right)^3 - \frac{5}{128} \left(\frac{1}{49} \right)^4 \right\} = \frac{149077207}{105413504}$$

$$\sqrt{2} = 1.414213562373 \dots \quad \sqrt{2} \div \underline{1.4142135622396}$$

プログラム例 10($\sqrt{2}$ の近似計算)

```

INPUT PROMPT "n=" : n
LET x=1/49
LET root=1
LET b=1/2
LET a=1
FOR k=1 TO n
  LET a=a*(b-k+1)/k*x
  LET root=root+a
NEXT k
PRINT sqr(2)
PRINT 14/10*root
END

```

問題 1 $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ の近似値を計算するにはどうしたらよいか? また $\sqrt[3]{2}$ の近似値を計算するにはどうしたらよいか? それらを計算するプログラムを作りなさい.

例 3(Napier の定数 e の近似値) $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ではあるが, これを近似計算に用いるのは能率が悪い.

$$e = 2.7182818284590 \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = \underline{2.71692393223589}$$

$$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = \underline{2.71814592682522}$$

$$\left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = \underline{2.71826823717449}$$

そこで, 例 1 の (2) を $x = 1$ とおいて用いよう.

$$e \doteq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{5!} = \underline{2.71666666666666} \cdots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!} = \underline{2.71828180114638}$$

問題 2 例 3 の計算を確かめるプログラムを作れ.

例 4(円周率 π の近似計算 1) 例 1 の (6) において $x = 1$ として,

$$\pi \doteq 4 \tan^{-1} 1 = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right)$$

を用いると,

$$\pi = 3.1415926535897 \cdots$$

$$\pi \doteq \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) = \underline{3.2323158094056}$$

$$\pi \doteq 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{199} + \frac{1}{201} \right) = \underline{3.15149340107099}$$

$$\pi \doteq 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{1999} + \frac{1}{2001} \right) = \underline{3.14259165433958}$$

これは能率が悪い. x の値があまり 0 に近くないからである.

問題 3 例 4 の計算を確かめるプログラムを作れ.

例 4 では x の値が 0 に近くなかったので, 今度は x の値をもっと 0 に近くして, Maclaurin の定理を適用するようにしよう.

例 5(Machin の公式) 次の Machin の公式が成り立つ.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{5}, \beta = \tan^{-1} \frac{1}{239} \text{ とおくと, } 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{6} \text{ より, } 0 < 4\alpha - \beta < \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{また, } \tan \alpha = \frac{1}{5} \text{ より, } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

$$\begin{aligned}\tan(4\alpha - \beta) &= \frac{\tan 4\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 4\alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = \frac{119 \cdot 239 + 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1\end{aligned}$$

$$\tan(4\alpha - \beta) = 1, \quad 0 < 4\alpha - \beta < \frac{2\pi}{3} \text{ より, } 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \text{ が成り立つ.}$$

例 6 (Machin の公式を用いる π の近似 1) 例 5 の Machin の公式と例 1 の (6) を用いると

$$\begin{aligned}\pi &= 4 \left[4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \cdots \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \frac{1}{9 \cdot 239^9} - \cdots \right\} \right] \\ \pi &\doteq 4 \left[4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1) \cdot 5^{2m+1}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot 239^{2n+1}} \right\} \right]\end{aligned}$$

ここで, m, n は求めたい近似値の有効桁数に応じてそれぞれ大きくとる. どれくらい大きくすればよいかは後に述べる.

定理 (交代級数についての Leibniz の定理) 解析教科書 p188 定理 8)

a_n を 0 に収束する単調減少数列, すなわち,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

とするとき, 次の無限交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

は収束し, その級数の値を S とすれば, 部分和

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$$

と S との差について,

$$E = |S_n - S| \leq a_{n+1}$$

が成り立つ.

証明

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

であることから,

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

が成り立つ.

$\{S_{2n}\}$ は有界な単調増加数列, $\{S_{2n+1}\}$ は有界な単調減少数列であるので, それぞれ収束する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S'$$

とすれば,

$$S' = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$$

以上より, 部分和の数列 $\{S_n\}$ は収束する. また, 誤差 E の評価については,

$$\begin{aligned} E &= |S - S_n| = |(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \cdots| \\ &= |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots| \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) - \cdots \\ &\leq a_{n+1} \end{aligned}$$

[証明終]

例 6(Machin の公式を用いる π の近似 1) の続き

例 6 の近似式の誤差は上の定理を用いると,

$$E \leq 16 \cdot \frac{1}{(2m+3) \cdot 5^{2m+3}} + 4 \cdot \frac{1}{(2n+3) \cdot 239^{2n+3}}$$

『十進 BASIC』は 1000 桁の計算をさせることができるので, 900 桁位までの有効桁の近似値を求める場合には, 丸め誤差は考慮に入れなくてよい. また, $m \geq 7$ とすると,

$$E \leq \frac{1}{5^{2m+3}} + \frac{1}{239^{2n+3}}$$

小数点以下 N 桁まで計算するには,

$$\frac{1}{5^{2m+3}} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{N+1}}, \quad \frac{1}{239^{2n+3}} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{N+1}}$$

すなわち,

$$m \geq \frac{\log 2 + (N+1) \log 10}{2 \log 5} - \frac{3}{2}, \quad n \geq \frac{\log 2 + (N+1) \log 10}{2 \log 239} - \frac{3}{2}$$

例えば, 100 桁まで計算するには, $m \geq 71$, $n \geq 20$

200 桁まで計算するには, $m \geq 143$, $n \geq 41$

300 桁まで計算するには, $m \geq 215$, $n \geq 62$

500 桁まで計算するには, $m \geq 358$, $n \geq 104$

900 桁まで計算するには, $m \geq 644$, $n \geq 188$

問題 4 例 6 の計算をするプログラムを作れ.

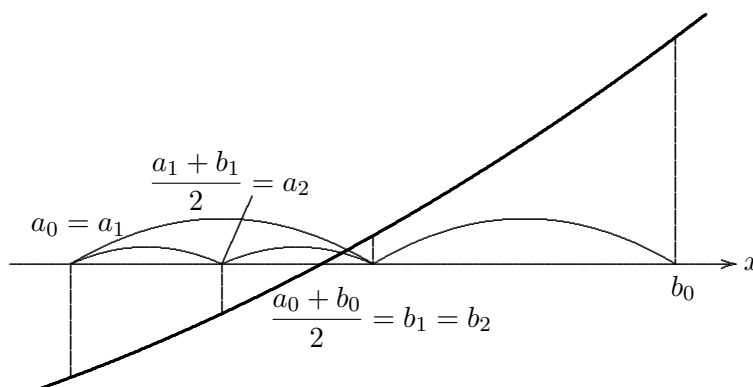
3.2 方程式の解の近似

方程式

$$f(x) = 0$$

の解 α を近似する方法について考える.

3.2.1 2分法 (区間縮小法)



有界閉区間 $[a, b]$ において, $f(x)$ は次の条件を満たしていると仮定する.

- $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で連続
- 両端における $f(x)$ の値 $f(a)$ の符号と $f(b)$ における符号は異符号とする.

すなわち, $f(a)f(b) < 0$

- $f(x) = 0$ の解は有界閉区間 $[a, b]$ において唯一つしかないとする.

このとき, 以下の手順で解 α を近似する.

今, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (逆の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $a_0 = a$, $b_0 = b$ とする.

(1) a_0 と b_0 の中点 $\frac{a_0 + b_0}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_0 + b_0}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) < 0$ のときは, $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = b_0$ とする.

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) > 0$ のときは, $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ とする.

このとき, α は a_1 と b_1 の間に存在する.

(2) a_1 と b_1 の中点 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_1 + b_1}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < 0$ のときは, $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = b_1$ とする.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) > 0$ のときは, $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ とする.

このとき, α は a_2 と b_2 の間に存在する.

.....

(k) a_{k-1} と b_{k-1} の中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) < 0$ のときは, $a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, $b_k = b_{k-1}$ とする.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) > 0$ のときは, $a_k = a_{k-1}$, $b_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ とする.

このとき, α は a_k と b_k の間に存在する.

$b = k - a_k$ が要求された精度 (誤差の限界) より, 小さくなれば, 中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ を近似解として採用する. 誤差 E は

$$E \leq b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

と評価できるが, 能率はよくない.

3.2.2 n 等分法

2 分法では区間を 2 等分ずつ行っただが, ここでは n 等分して考える.

今, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (逆の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $a_0 = a$, $b_0 = b$ とする.

(1) 区間 $[a_0, b_0]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_1 , 右の点を b_1 とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

(2) 区間 $[a_1, b_1]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_2 , 右の点を b_2 とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

.....

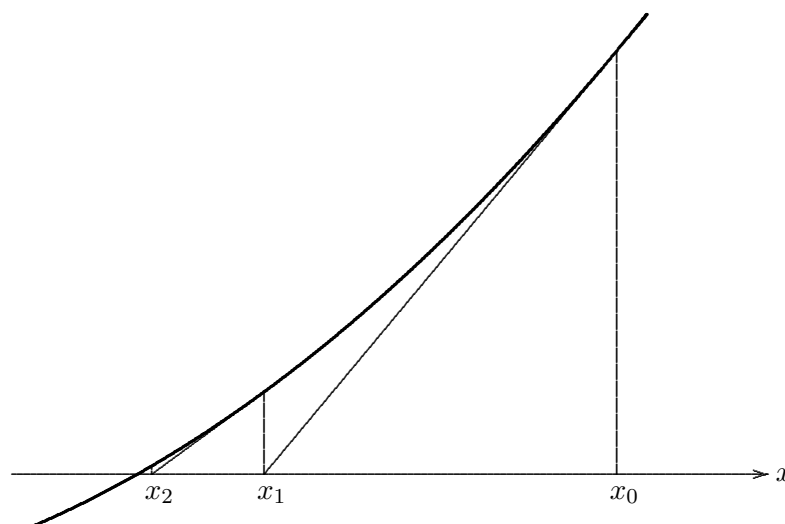
(k) 区間 $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_k , 右の点を b_k とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

$b = b_k - a_k$ が要求された精度 (誤差の限界) より, 小さくなれば, 中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ を近似解として採用する. 誤差 E は

$$E \leq b_k - a_k = \frac{1}{n^k}(b - a)$$

と評価できる. 能率はは 2 分法と比べてどうだろうか?

3.2.3 Newton 法



有界閉区間 $[a, b]$ において, $f(x)$ は次の条件を満たしていると仮定する.

- ・ $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で 2 回微分可能で $f''(x)$ は定符号
- ・ 両端における $f(x)$ の値 $f(a)$ の符号と $f(b)$ における符号は異符号とする.

すなわち, $f(a)f(b) < 0$

このとき, a と b の間にはただ一つの解を持つ. 以下の手順で解 α を近似する.

今, $f''(x) > 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (他の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $x_0 = b$ とする.

(1) x_0 における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ を引き, x 軸と交わった交点を x_1 とする. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(2) 同様に, x_1 における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ を引き,

x 軸と交わった交点を x_2 とする. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

.....

(k) x_{k-1} における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$ を引き,
 x 軸と交わった交点を x_k とする. $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

以上まとめると,

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\ x_0 = b \text{ (初期値) または, } x_0 = a \end{cases}$$

初期値 x_0 を a にとるか b にとるかは, $f(a)$ あるいは $f(b)$ が $f''(x)$ と同符号になるように選ぶとよい.

誤差の評価を行うのに, $f(x)$ を $x = x_{k-1}$ において Taylor の定理を適用すると ($n = 2$)

$$f(\alpha) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(\alpha - x_{k-1}) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - x_{k-1})^2$$

$$E_k = |x_k - \alpha| = \left| x_{k-1} - \alpha - \frac{f(x_{k-1}) - f(\alpha)}{f'(x_{k-1})} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c)}{f'(x_{k-1})} \right| |x_{k-1} - \alpha|^2$$

ここで, $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ とおけば,

$$E_k \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_{k-1} - \alpha|^2 = \frac{M_2}{2m_1} E_{k-1}^2$$

このような収束を **2次収束** といい, 非常によい近似になっている. これに対して, 2分法や n 等分法は $E_k \leq cE_{k-1}$ の評価なので, **1次収束** となっている.

3.2.4 割線法 (セカント法)

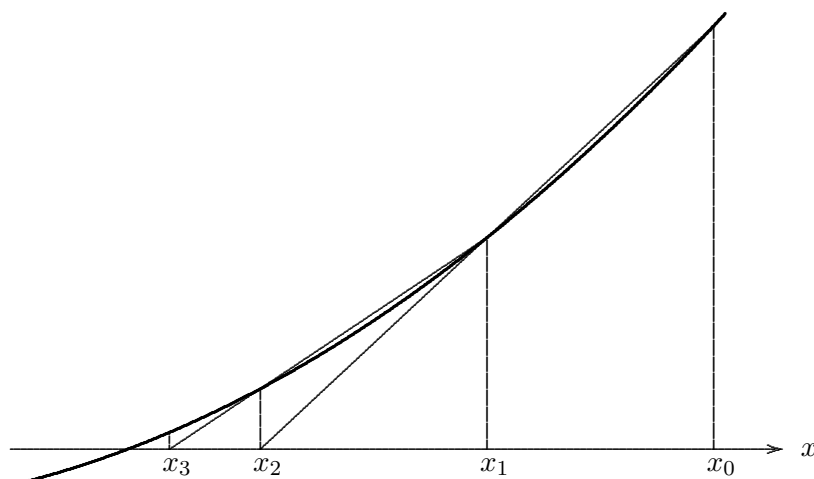
Newton 法では, 接線を用いたがここでは接線の代わりに曲線上の 2 点を結ぶ直線 (割線) を用いてみよう.

2 点 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

となるので, x 軸との交点は $x = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ となる. これを x_{k+1} とおく.
 Newton 法と同様に次の式が得られる.

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ \text{初期値 } x_0, x_1 \end{cases}$$



Newton 法と同様の仮定をおけば, 2 つの初期値 x_0, x_1 を $f(x)$ の値が $f''(x)$ の符号と符号になる 2 点を選べばよい. この割線法は Newton 法に比べてその能率は若干悪くなる.

3.3 定積分の近似

ここでは、 $\int_a^b f(x) dx$ の近似値を求める方法について考えてみよう。

3.3.1 区分求積法 (短冊近似)

定積分の定義は、閉区間 $[a, b]$ の分割 Δ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と n 個の小区間 $[x_{k-1}, x_k] (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ から、点 ξ_k を選び、Riemann 和

$$S(\Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を考え、分割 Δ の最大幅 $|\Delta|$ を 0 に限りなく近づけた時の極限

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \{\xi_k\})$$

が分割の仕方 Δ や小区間からの点の選び方 $\{\xi_k\}$ に関係なくある一定の値に近づくとき、その値を、 $\int_a^b f(x) dx$ と定義する。

今、分割 Δ を n 等分にとり、小区間からの点の選び方 $\{\xi_k\}$ を小区間の左端の点 x_{k-1} を選ぶと、

$$x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k, \quad \xi_k = x_{k-1} = a + \frac{(b-a)}{n}(k-1)$$

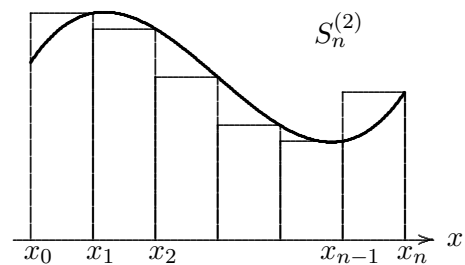
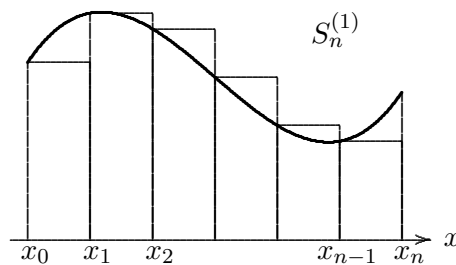
となり、その場合の Riemann 和 $S_n^{(1)}$ は

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)}{n}(k-1)\right) \frac{b-a}{n}$$

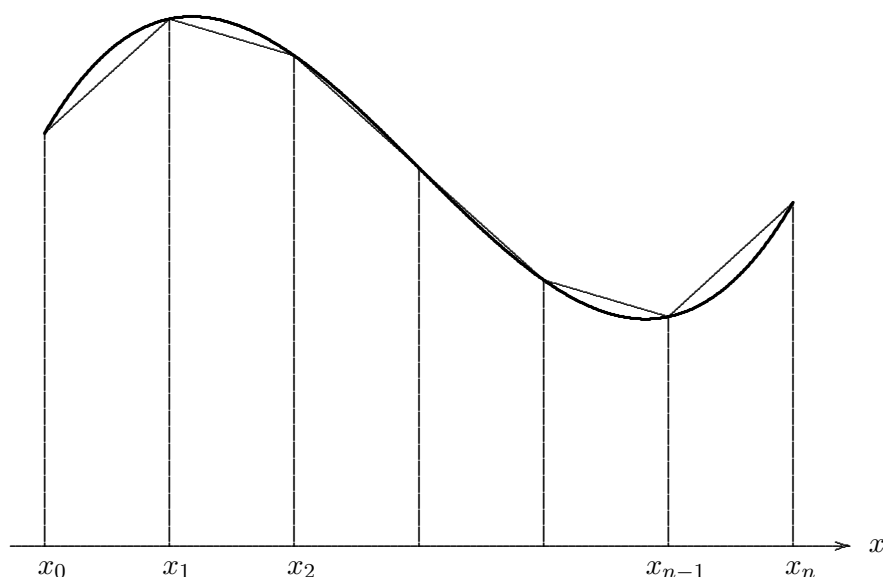
$\{\xi_k\}$ を小区間の右端の点 x_k を選ぶと、その場合の Riemann 和 $S_n^{(2)}$ は

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)}{n}k\right) \frac{b-a}{n}$$

定積分の定義から、 $\int_a^b f(x) dx$ の近似値として、 n を大きくとって、 $S_n^{(1)}$ や $S_n^{(2)}$ を採用することができる。



3.3.2 台形近似法



区分求積法 (短冊近似法) では, 各小区間の定積分を長方形で近似したが, ここでは, (x_{k-1}, y_{k-1}) と (x_k, y_k) を結ぶ台形で近似する. これは, 結果的に, $y = f(x)$ の曲線を折れ線で近似することと同じになる. そうすると, 近似公式は,

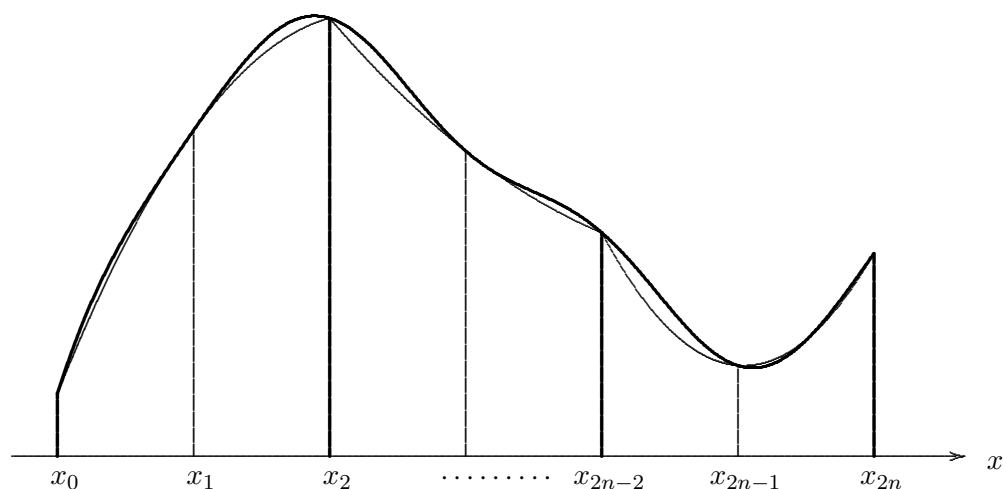
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \frac{b-a}{n} + \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{2n} \{y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\} \end{aligned}$$

となる. これを **台形近似法** あるいは **台形公式** といい, 区分求積法 (短冊近似法) の $S_n^{(1)}$ と $S_n^{(2)}$ の平均 $\frac{S_n^{(1)} + S_n^{(2)}}{2}$ に等しい.

台形近似法の誤差 E については次のような評価が得られる.

$$E \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2} \quad \text{ここで, } M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \text{ とする.}$$

3.3.3 Simpson の公式



区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分する. 分点を $x_k = a + \frac{b-a}{2n}k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$) とし, 各分点における y の値を $y_k = f(x_k)$ とおく.

n 個の小区間 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ において, 3 点 (x_{2k-2}, y_{2k-2}) , (x_{2k-1}, y_{2k-1}) , (x_{2k}, y_{2k}) を通る 2 次曲線で $f(x)$ を近似する.

$g(x)$ が 2 次関数のとき,

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + g(b) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \text{ となるので, これを各小区間}$$

間に適用すると ($a = x_{2k-2}, b = x_{2k}$),

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} g(x) dx = \frac{b-a}{6n} (y_{2k-2} + y_{2k} + 4y_{2k-1})$$

これから, 近似公式

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \\ &\doteq \int_{x_0}^{x_2} g(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} g(x) dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} g(x) dx \\ &\doteq \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + \\ &\quad + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})) \end{aligned}$$

が得られる. これを **Simpson の公式** という.

Simpson の公式の誤差 E の評価については

$$E \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

n を大きくするとき台形公式では誤差は $\frac{1}{n^2}$ の order なのに対して, Simpson の公式では誤差が $\frac{1}{n^4}$ の order となっている. (これだけ, Simpson の公式がよい近似になっている)

問題 5 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ の解を近似するプログラムを, 2 分法, 10 等分法, Newton の方法, 割線法のそれぞれについて作成せよ.

問題 6 定積分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ の値を近似するプログラムを, 区分求積法, 台形公式, Simpson の公式のそれぞれについて作成せよ.

問題 7 前問の問題 6 において, 「誤差の累積」について調べよ.

4 差分 (定差) 方程式

4.1 差分 (定差) 方程式の例

例 7 (人口の変化) ある国の人口は毎年 a % の割合で増えていきます. n 年後の人口を P_n とするとき, P_{n+1} を P_n で表わしなさい.

例 8 (Fibonacci の数列) 各項はその前の項と前の前の項の和になっていて, 最初の項 a_0 は 0 であり 8 その次の項 a_1 が 1 である数列を Fibonacci の数列という. すなわち,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

例 9 平面上に n 本の直線があり, どの 2 本の直線も平行でなく, どの 3 本の直線も 1 点では交わらないとき, これら n 本の直線により分割される領域の個数を a_n とする. a_{n+1} を a_n で表わしなさい.

例 10 (ロジスティック増殖) ある池にメダカがすんでいます. メダカはたくさんの子供を生むのですが一年後までには相当数の子供が死んでしまいます. また, この池もそんなに広いわけではないのでメダカの数 C 匹を超えると次の年には減ってしまいます. このような理由で現在のメダカの数 p とすると, 次の年のメダカ数は前の年より $a(1-p/C)p$ 万匹増える (ただし, p が C を超えると減る) とします (a はある正の定数). n 年後にはメダカの数はどうなるでしょうか. n 年後のメダカ数を p_n 匹として p_{n+1} を p_n で表わしなさい.

例 11 (携帯電話の普及) 日本の人口を N 人とします. その内で, 現在携帯電話を所有している人の数を x_0 とします. 携帯電話の普及は現在携帯電話を所有している人の数に比例し, また現在携帯電話を所有していない人の数にも比例するとします. このことから, 次のような漸化式が成り立ちます.

$$x_{n+1} - x_n = kx_n(N - x_n)$$

例 12 (木村先生の線形代数より — ある森の物語) ある森にウサギとキツネが住んでいます. ウサギは, 一年間に a 倍に増えるのですがその間に何匹かはキツネに食べられてしまいます. 一匹のキツネは平均して, 一年に b 匹のウサギを食べます. キツネについては, 年をとったり, 食料難のために, 毎年, c % のキツネが死んでいきます. しかし, 子ギツネも生まれます. 生まれる子ギツネの数は, 前の年のウサギの数の d % になります. それは母ギツネがウサギの数を見て子供を作るからです. ウサギの数とキツネの数は n 年後にはどうなるでしょうか. n 年後のウサギの数を R_n , キツネの数を F_n とすると

き, R_{n+1} と F_{n+1} を R_n , F_n を用いて表わしなさい. また, この式を行列の形

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

で書きなさい。

例 13(ある森の物語の変形) ある森にウサギとキツネが住んでいます。前の年のウサギの数を R , キツネの数を F とすると, 次の年のウサギの数は病気で死んだり生まれたりして $(1 + A(1 - R/C))R$ 匹になるのですが, そのほかに キツネに DRF 匹食べられてしまいます。また, 次の年のキツネの数は $QDRF$ 匹になります。ウサギの数とキツネの数は n 年後にはどうなるでしょうか。 n 年後のウサギの数を R_n , キツネの数を F_n とするとき, R_{n+1} と F_{n+1} を R_n , F_n を用いて表わしなさい。

(ここで, A :増殖率, C :容量, D :捕食率, Q :転換率 といい, いずれも正の定数とする)

例 14 アユの寿命は 3 年とします。ことし生まれた赤ちゃんアユのうち, 一年後まで生き残れるアユは 5 % とします。また, 満 1 歳のアユが次の年まで生き残れるのは半分とします。満 2 歳のアユが次の年まで生き残れるのも半分とします。満 3 歳のアユは次の年までにはすべて死んでしまいます。また, 満 1 歳アユは毎年一匹あたり平均 10 匹の赤ちゃんアユを産み, 満 2 歳アユは毎年一匹あたり 20 匹の赤ちゃんアユを産むとします。満 3 歳のアユはもう子供を産みません。(もっと沢山生むのですが大半は孵化しなかったり, 大きな魚などに食べられてしまう)。いま, 一匹もアユの住んでいない湖に赤ちゃんアユを 100 万匹放流すれば, n 年後の各年令のアユの個数はそれぞれ何匹になるでしょうか。 n 年後の赤ちゃんアユの数を P_n^0 , 満 1 歳アユの数を P_n^1 , 満 2 歳アユの数を P_n^2 , 満 3 歳アユの数を P_n^3 として漸化式 (差分方程式) を作りなさい。また, 例 5 のようにこれを行列の形で書きなさい。

例 15(ローン返済 2004 年兵庫県立大学経済・経営学部前期入試問題の変形) A 氏はある年に B 銀行から年利 r で a 円を借りることにした。1 年後から毎年借りた日と同じ日に一定額 b 円を返済して, 20 回で返済が終わるようにしたい。 $(n+1)$ 年後の返済直後のローン残高 x_{n+1} を a , b , x_n を用いて表わせ。ただし, 利息の計算は 1 年ごとの複利計算とする。また, 20 回で返済が終わるようにするには b をどのように定めればよいか。

例 16(Markov chain 天候の確率) 毎日の天候が「晴れ」,「曇り」,「雨」の 3 種類しかないとしよう。

「晴れ」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.7,「曇り」である確率は 0.2,「雨」である確率は 0.1。「曇り」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.5,「曇り」である確率は

0.3, 「雨」である確率は0.2. 「雨」の日の次の日が「晴れ」である確率は0.3, 「曇り」である確率は0.4, 「雨」である確率は0.3であるとしよう.

今日が「晴れ」とするとき, n 日後の天候が「晴れ」である確率を x_n , 「曇り」である確率を y_n , 「雨」である確率を z_n とするとき, x_{n+1} , y_{n+1} , z_{n+1} を x_n , y_n , z_n で表わせ.

例 17 異なる n 個のものを k 組に分ける分け方の総数を $f(n, k)$ とするとき, $f(n+1, k)$ を $f(n, k)$ と $f(n, k-1)$ を用いて表わしなさい. (ヒント: 特定の1個が単独で1個だけの組を作っている場合とそれが2個以上の組を作っている場合に分けて考えなさい)

また, $f(n, 1) = 1$, $f(n, n) = 1$ であり, 上で作った漸化式を用いて, $f(5, 3)$ を計算しなさい.

例 18 自然数 n をいくつかの自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n)$ とする. また, 自然数 n を k 個の自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n, k)$ とする. このとき,

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$$

である.

言い換えると $p(n, k)$ は方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad (x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1)$$

の自然数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ の個数に等しい. $p(n, k)$ を $p(n-k, k)$ と $p(n-1, k-1)$ を用いて表わせ.. (ヒント: $x_k = 1$ の場合と $x_k \geq 2$ の場合に分けて考えなさい)

さらに, これらを用いて $p(10)$ を計算しなさい.

例 19(Mandelbrot Set) 複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + \alpha, \quad z_0 = 0$$

を考える. $n \rightarrow \infty$ のとき, z_n が有界にとどまるような複素数 α の集合を Mandelbrot Set という. この Mandelbrot Set は複素平面上でどのような集合となるか?

例 20(Julia Set) 複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + \beta, \quad z_0 = \alpha$$

を考える. $n \rightarrow \infty$ のとき, z_n が有界にとどまるような複素数 α の集合を Julia Set という. この Julia Set は複素平面上でどのような集合となるか? ただし, β は複素定数とする.

5 微分方程式

5.1 導関数の近似

微分法の定義は次の式で与えられる.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

このことから, 導関数は h を十分小さい正の数を取って,

$$f'(x) \doteq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と近似できる. ただ, これは x の右側しか見ていないので, 左側も同様に考えると,

$$f'(x) \doteq \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

とも近似できる. それで, 2つの平均をとって,

$$f'(x) \doteq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

と近似することにしよう.

問題 8 次のそれぞれの関数について, 数学的に求めた導関数と上で述べた導関数の近似式の2つのグラフを同じ所に描くプログラムを作りなさい.

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

(2) $f(x) = \sin x$

(3) $f(x) = \tan^{-1} x$

5.2 微分方程式の例

微分方程式はさまざまな自然現象や社会現象を記述するのによく用いられている.

微分方程式の例を述べよう. (以下の例において, t は時刻を表わす)

例 21 (落下運動の方程式)

x : 物体の高さ, g : 重力加速度 (約 9.8m/sec^2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

例 22 (人口増加モデル 1: マルサスの人口法則)

$p(t)$: 時刻 t における人口, a : 人口増加率 (定数)

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t)$$

例 23 (人口増加モデル 2 : ロジスティック方程式)

$p(t)$: 時刻 t における人口 , a : 人口増加率 (定数)

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

$-bp^2$: 居住空間, 資源, 食料などによる競争に関する項 (b :定数)

例 24 (技術革新の普及 : ロジスティック方程式)

N : 農業従事者総数 , c : 定数

$p(t)$: 時刻 t における新技術を取り入れた農業従事者数

$$\frac{dp}{dt} = cp(N - p)$$

例 25 (捕食者-被食者モデル : Lotka-Volterra の微分方程式)

F : 海の特定期域におけるサメに食べられるある種の魚 (fish) の個体数

S : 同区域におけるサメ (shark) の個体数

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = (a - bF - cS)F \\ \frac{dS}{dt} = (-k + \lambda F)S \end{cases}$$

ここで, a, c, k, λ は正の定数で, b は非負の定数である.

例 26 (振り子の運動方程式)

θ : 振り子の下向き垂直方向からの角度 , l : ひもの長さ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

例 27 (惑星の運動方程式)

太陽を原点にとり, 惑星の軌道面に xy 座標を導入する. C を正の定数として,

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -C \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -C \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

例 28 (経済学の市場モデル)

m 個の財について,

p_i : 第 i 番目の財の価格

$x_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$: 第 i 番目の財の需要量

$y_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$: 第 i 番目の財の供給量

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = k_1 (x_1(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_1(p_1, p_2, \dots, p_m)) \\ \frac{dp_2}{dt} = k_2 (x_2(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_2(p_1, p_2, \dots, p_m)) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dp_m}{dt} = k_m (x_m(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_m(p_1, p_2, \dots, p_m)) \end{cases}$$

ここで, 各 k_i は正の定数で調整速度とよばれている. 方程式の右辺に現れる

$$x_i(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

を $E_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$ であらわし, これを超過需要関数とよぶ.

例 29 (直交曲線群)

xy 平面上の曲線群

$$F(x, y, c) = 0$$

に含まれるすべての曲線と直交する曲線をこの曲線群の直交曲線という. 曲線群の曲線上の各点における接線の傾きは, 陰関数の定理より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

で与えられる. よって, これと直交する曲線の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}$$

となるので, 直交曲線のみたすべき微分方程式は c を消去して得られる方程式である.

例えば, 放物線群 $y - cx^2 = 0$ の直交曲線は $\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1}{-2cx}$, $c = \frac{y}{x^2}$ より,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$$(5.1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

また、未知関数と関係式が2個以上の場合もある。

[illegible]

[illegible]
$$(5.4) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(n_1)} = f_1(x, y_1, y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, y'_m, y''_m, \dots, y_m^{(n_m-1)}) \\ y_2^{(n_2)} = f_2(x, y_1, y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, y'_m, y''_m, \dots, y_m^{(n_m-1)}) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_m^{(n_m)} = f_m(x, y_1, y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, y'_m, y''_m, \dots, y_m^{(n_m-1)}) \end{array} \right.$$

[illegible]

x のある区間で微分方程式を満たす関数を微分方程式の解とよぶが、通常、微分方程式の解は無数に存在する．方程式 (5.1) や (5.4) の方程式の場合には、 n 個の任意定数を含んだ解が存在するが、そのような解を 一般解 とよぶ．任意定数を含まない解 (任意定数にある数が代入された解) を 特殊解 とよび、一般解からは得られない解を 特異解 とよぶ．また、(5.2) や (5.5) の方程式の一般解は $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 個の任意定数を含み、(5.3) や

(5.6) の方程式の一般解は m 個の任意定数を含む.

無数にある解の中から, 特定の解を定めるためには, 付帯条件を与えておく必要がある. 例えば, (5.1) や (5.4) の場合には,

$x = x_0$ において, $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ の値を指定する.

(5.2) や (5.5) の場合には,

$x = x_0$ において,

$y_1(x_0), y_1'(x_0), \dots, y_1^{(n_1-1)}(x_0)$

$y_2(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_2^{(n_2-1)}(x_0)$

.....

$y_m(x_0), y_m'(x_0), \dots, y_m^{(n_m-1)}(x_0)$

の値を指定する.

このような付帯条件を **初期条件 (Cauchy 条件)** という.

また, 異なる 2 点 $x = x_1$ と $x = x_2$ において, 未知関数の値や導関数の値を指定するような条件を **境界条件** という. 一般に, 解を一つに定めるためには任意定数の個数だけ条件を与える必要がある.

例 21 の解法

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -g \text{ より, } \frac{dx}{dt} = \int (-g) dt + C_1 = -gt + C_1 \text{ となり, さらに,}$$

$$x = \int (-gt + C_1) dt + C_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \text{ となる. これが一般解であり}$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + 2t \text{ などは特殊解である. この方程式には特異解はない.}$$

微分方程式を解く方法については,

- ・積分を用いて解く方法 (求積法による解法)
- ・無限級数を用いて解く方法
- ・数値計算で近似解を求める方法
- ・積分方程式に帰着して逐次近似で近似解を求める方法

などがある. また, 求積法を用いて解を具体的に書き下すことのできる微分方程式はそれほど多くない. 解を書き下すことはしないで, 解のさまざまな性質について調べることもある.

5.3 微分方程式の数値解法

この節では、次のような1階の連立微分方程式の初期値問題の数値解法について説明する。未知関数は x, y の2個で説明するが、3個以上の方程式についても同様のことが言える。

$$(5.7) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

方程式 (5.7) を $t_0 \leq t \leq T$ の範囲で近似的に解きたい。いま、この区間 $[t_0, T]$ を N 等分し、一つの小区間の幅を $h = \frac{T-t_0}{N}$ とおこう。そして、 n 番目の分点を $t = t_n$ 、解 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ の $t = t_n$ における値を $x_n = x(t_n)$ 、 $y_n = y(t_n)$ としよう。すなわち、

$$(5.8) \quad \begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ x_n = x(t_n) \\ y_n = y(t_n) \end{cases}$$

とする。ここでは、 $t = t_n$ における x_n 、 y_n を近似的に定める。他の t における x 、 y の値は折線によって定められているものとする。

5.3.1 Cauchy-Euler の折線法

平均値の定理より、

$$(5.9) \quad \begin{cases} \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \frac{dx}{dt}(t_n + \theta_{1,n}h) \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = \frac{dy}{dt}(t_n + \theta_{2,n}h) \end{cases}$$

が成り立つ。(5.9) の右辺は、

$$(5.10) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t_n + \theta_{1,n}h) = f(t_n + \theta_{1,n}h, x(t_n + \theta_{1,n}h), y(t_n + \theta_{1,n}h)) \\ \frac{dy}{dt}(t_n + \theta_{2,n}h) = g(t_n + \theta_{2,n}h, x(t_n + \theta_{2,n}h), y(t_n + \theta_{2,n}h)) \end{cases}$$

となり、この右辺は、 h が十分小さいとき、すなわち N が十分大きいとき、次のように近似する。

$$(5.11) \quad \begin{cases} f(t_n + \theta_{1,n}h, x(t_n + \theta_{1,n}h), y(t_n + \theta_{1,n}h)) \doteq f(t_n, x(t_n), y(t_n)) \\ g(t_n + \theta_{2,n}h, x(t_n + \theta_{2,n}h), y(t_n + \theta_{2,n}h)) \doteq g(t_n, x(t_n), y(t_n)) \end{cases}$$

すると、初期値問題 (5.7) の次のような近似解が得られる。

$$(5.12) \quad \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} \doteq x_n + hf(t_n, x_n, y_n) \\ y_{n+1} \doteq y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \end{cases}$$

このような近似解法を **Cauchy-Euler の折線法** という。Cauchy-Euler の折線法による誤差の order は一つの小区間においては h^2 の order であり、全区間においては h^1 の order である。

5.3.2 Runge-Kutta 法

Cauchy-Euler の折線法は大変 simple な近似法であったが、あまり精密ではない。もう少し精密にしたものが次の **Runge-Kutta 法** である。

$$(5-2) \quad \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ a_1 = hf(t_n, x_n, y_n) \quad , \quad b_1 = hg(t_n, x_n, y_n) \\ a_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}) \quad , \quad b_2 = hg(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}) \\ a_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}) \quad , \quad b_3 = hg(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}) \\ a_4 = hf(t_n + h, x_n + a_3, y_n + b_3) \quad , \quad b_4 = hg(t_n + h, x_n + a_3, y_n + b_3) \\ x_{n+1} \doteq x_n + \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \\ y_{n+1} \doteq y_n + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) \end{cases}$$

Runge-Kutta 法による誤差の order は一つの小区間においては h^5 の order であり、全区間においては h^4 の order である。

問題 9 Runge-Kutta 法を次の微分方程式に当てはめよ。ただし、分割しない区間 $[t_0, t_1]$ で考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

これは、積分 $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$ の Simpson の近似公式に対応していることを確かめよ。

6 乱数を用いたシミュレーション

この節は以下の書を参考にした。両書とも絶版であるが、インターネットにて閲覧できる。

脇本和昌著：『乱数の知識』 1970 年 森北出版 (絶版)¹

宮武修・中山隆著：『モンテカルロ法』 1960 年 日刊工業新聞社 (絶版)²

乱数列 とは規則性のない、次に出てくるのが予測できないような数列のことである。乱数列の要素を **乱数** という。

サイコロを振って出る目を順に並べれば $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ からなる乱数列が得られる。あるいは同じ大きさの 10 個のボールに 0～9 までの数字を書いて、箱に入れ、無作為にボールを取り出し、番号を記し、ボールを箱に戻して、また無作為にボールを取り出し番号を記していけば、0～9 からなる乱数列が得られる。

6.1 乱数の種類

自然乱数：0 以上または 1 以上の整数が不規則に現れる乱数。あらゆる 0 以上 (または 1 以上) の整数を考えても良いがたいていの場合には、現れる数の最大数を定めておく場合が多い。

一様乱数：実数の区間を定めて、その区間内の実数が同じ確率で出現するような乱数。『十進 BASIC』等のプログラミング言語や『Excel』等では区間 $[0, 1)$ での (擬似) 一様乱数が組み込まれている。この授業では特にことわらなければ、一様乱数としての区間は、 $[0, 1)$ または $[0, 1]$ を考えることにしよう。

正規乱数：その分布が正規分布になるような乱数、正規分布とは、確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

の形をした分布で、この場合の平均は μ 、標準偏差は σ である。 $\mu = 0$ 、 $\sigma = 1$ であるような正規分布を **標準正規分布** という。

6.2 擬似乱数の作り方

コンピュータは規則性をもって計算するので、コンピュータを用いて厳密な意味の乱数を作ることは出来ない。そこで、乱数に近い性質を持った数列を作る必要がある。このよ

¹<http://www.sci.kagoshima-u.ac.jp/~ebsa/wakimoto01/index.html>

²<http://www.sci.kagoshima-u.ac.jp/~ebsa/miyatake01/index.html>

うな数列を **擬似乱数列** といい, その要素を **擬似乱数** という.

6.2.1 平方採中法 (1946 年 von Neumann による)

$2n$ 桁の擬似乱数を作るとき, x_1 として, $2n$ 桁の数を一つ選ぶ. x_1 を平方すると $4n$ 桁の数が出来る. ($4n$ 桁に達しないときは, 不足桁数分だけ先頭に 0 を追加する) 真ん中の $2n$ 桁の数を x_2 とする. これを繰り返す. この方法は偶数桁の乱数しか得られないことと後ろの方で短い周期になったしまったり, 0 が並んでしまうという欠点がある.

例 30 $n = 4$ として平方採中法で 8 桁の擬似乱数を作ろう. $x_1 = 12345678$ とする.

$$\begin{aligned} x_1 &= 12345678 \\ x_1^2 &= 0152415765279684, \quad x_2 = 41576527 \\ x_2^2 &= 1728607597381730, \quad x_3 = 60759738 \\ x_3^2 &= 3691745761828640, \quad x_4 = 74576182 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

この数列は 10351 番目以降はすべて下 4 桁が 0 になってしまう. また, $x_{10353} = x_{10453} = 8656000$ となり, 10353 以降は周期 100 になってしまう. また, この数列の最大値は 99988827, 最小値は 15390 である.

6.2.2 線形合同法 (混合合同法)

3 個の自然数 a, c, m を選ぶ. m は十分大きな自然数を取り, x_1 を m より小さな自然数とし, 以下のような漸化式にて数列を作る.

$$x_{n+1} = a \cdot x_n + c \text{ を } m \text{ で割った余り } \equiv a \cdot x_n + c \pmod{m}$$

周期を長くするための性質として, 次のことが知られている.

性質 $m = 10^p$, $a \equiv 1 \pmod{20}$, $c \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{10}$

とすると, 任意の初期値 x_1 に対して, 周期 10^p をもつ. これは, 勿論, 最大周期であり, $0 \sim (10^p - 1)$ までの数がすべて現れることを示している.

(前の 脇本和昌著:『乱数の知識』を参考にした)

例 31 上の性質を利用して 4 桁の擬似乱数を作ろう.

$m = 10^4$, $a = 2341 \equiv 1 \pmod{20}$, $c = 4567 \equiv 7 \pmod{10}$. $x_1 = 1234$ とする.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1234 \\ 2341 \cdot 1234 + 4567 &= 2893361 \equiv 3361 \pmod{10000}, \quad x_2 = 3361 \\ 2341 \cdot 3361 + 4567 &= 7872668 \equiv 2668 \pmod{10000}, \quad x_3 = 2668 \\ 2341 \cdot 2668 + 4567 &= 6250355 \equiv 355 \pmod{10000}, \quad x_4 = 355 \end{aligned}$$

最近の優れた擬似乱数発生法としてメルセンヌ・ツイスタ (Mersenne twister) というものがあるらしい.

6.2.3 擬似一様乱数の作り方

区間 $[0, 1)$ での擬似一様乱数は上記で得られた擬似自然乱数列 $\{x_k\}$ の最大値を M , 最小値を m とするとき, $\{\frac{x_k - m}{M - m + 1}\}$ を採用すればよい.

問題 10 例 30, 例 31 の各場合について, それらを求めるプログラムを作れ. また, それらから, 擬似一様乱数も作りなさい. さらに, それぞれの場合について, 擬似一様乱数を 10000 個発生させ, 0.05 刻みで度数分布表を作り, それを棒グラフで表示しなさい.

問題 11 例 30, 例 31 の各場合について, 問題 10 で得られる 10000 個の擬似一様乱数を用いて, サイコロを 10000 回投げるシミュレーションを行い, 各目が何回出たかを数え, それを棒グラフで表示しなさい.

6.2.4 その他の擬似乱数の作り方

確率密度関数 $f(x)$ を持つ擬似乱数の作り方

確率密度関数 $f(x)$ の分布関数を $F(x)$ とする.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

このとき, $y = F(x)$ とすると, $dy = f(x)dx$ より, x が確率密度関数 $f(x)$ の分布とすると, y は区間 $[0, 1]$ の一様分布となる. 逆にいえば, y が区間 $[0, 1]$ の一様分布とすれば, x は確率密度関数 $f(x)$ の分布となる. このことから,

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

を一様乱数列とすれば,

$$x_1 = F^{-1}(y_1), x_2 = F^{-1}(y_2), x_3 = F^{-1}(y_3), \dots$$

確率密度関数 $f(x)$ を持つ乱数列となる.

指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ を持つ擬似乱数の作り方

分布関数は

$$y = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - y)$$

$$x_n = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - y_n)$$

$\{y_n\}$ を一様乱数列とするとき $\{-\frac{1}{\lambda} \log(1 - y_n)\}$ は指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ を持つ乱数列となる. $\{y_n\}$ が区間 $[0, 1)$ の一様乱数であれば, $\{1 - y_n\}$ は区間 $(0, 1]$ の一様乱数となるので, $\{y_n\}$ の代わりに, $\{1 - y_n\}$ を用いてもよい. すると, $\{-\frac{1}{\lambda} \log y_n\}$ も指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ を持つ乱数列となる.

擬似標準正規乱数の作り方

標準正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ の分布関数は,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$$

であり, それを初等関数では表せない. また, その逆関数を求めることは難しい. そのため, 擬似標準正規乱数は次のような方法で作られる.

擬似標準正規乱数の作り方 1(中心極限定理の応用)

中心極限定理

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$$

を平均 μ , 分散 σ^2 のある分布に従う乱数列とすると, それらを順に n 個ずつとった平均

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

の列は, n を大きくすると, 平均が μ , 分散が $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に近づく. また, $z = \frac{\sqrt{n}(y - \mu)}{\sigma}$ とすると, z は標準正規分布に近づく. (前の 脇本和昌著:『乱数の知識』を参考にした)

$n = 12$ とし, $\{x_n\}$ を区間 $[0, 1)$ での一様乱数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$ とすると, $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$ より,

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12} - 6$$

とすると, z は標準正規乱数に近いものとなる.

問題 12 十進 BASIC に組み込まれた擬似一様乱数 RND を用いて, 上の方法で擬似標準正規乱数を 10000 個発生させ, 0.05 刻みで度数分布表を作り, それを棒グラフで表示しなさい.

擬似標準正規乱数の作り方 2(Box-Muller 法)

2 個の区間 $[0, 1)$ での擬似一様乱数 u, v をとり,

$$x = \sqrt{-2 \log u} \cos 2\pi v$$

$$y = \sqrt{-2 \log u} \sin 2\pi v$$

とすると, x, y は独立な擬似標準正規乱数になる.

[簡単な証明] 2つの式を平方して加えると

$$\begin{aligned} -2 \log u &= x^2 + y^2 \\ u &= \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -x \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \end{aligned}$$

下の式を上で割ると

$$\begin{aligned} \tan 2\pi v &= \frac{y}{x} \\ v &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

この変数変換の Jacobi の行列式 (Jacobian) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) & -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ -y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) & \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \end{aligned}$$

以上より,

$$dudv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dx dy$$

となり, これは u と v が区間 $[0, 1)$ での一様分布であれば, x と y が独立な標準正規分布であることを示している.

問題 13 十進 BASIC に組み込まれた擬似一様乱数 RND を用いて, Box-Muller 法で擬似標準正規乱数を 10000 個発生させ, 0.05 刻みで度数分布表を作り, それを棒グラフで表示しなさい.

擬似 Poisson 乱数の作り方

Poisson 分布

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

に従う擬似乱数を作るには次のようにすればよい.

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

を擬似一様乱数とすると,

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \leq x_n < \sum_{i=0}^{k_n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$$

となるような k_n を定める. すると,

$$k_1, k_2, k_3, \dots$$

は擬似 Poisson 乱数列となる.

[簡単な証明] 一般に, 離散型確率分布 p_k をもつ擬似乱数を作るには,

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

を擬似一様乱数とすると,

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} p_i \leq x_n < \sum_{i=0}^{k_n} p_i$$

となるような k_n を定める. すると,

$$k_1, k_2, k_3, \dots$$

は離散型確率分布 p_k をもつ擬似乱数列となる. なぜなら,

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} p_i \leq x_n < \sum_{i=0}^{k_n} p_i$$

となる確率は $\sum_{i=0}^{k_n} p_i - \sum_{i=0}^{k_n-1} p_i = p_{k_n}$ であるから.

問題 14 十進 BASIC に組み込まれた擬似一様乱数 RND を用いて, 上の方法で $\lambda = 2$ である擬似 Poisson 分布乱数を 1000 個発生させ, 度数分布表を作り, それを棒グラフで表示しなさい.

6.3 乱数を用いたシミュレーション (モンテカルロ法)

例 32(定積分の計算) 一様乱数列を

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

とし, N を十分大きく取ると,

$$\int_0^1 f(x) dx \doteq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N)}{N}$$

となる.

問題 15 例 32 の方法で $\int_0^1 x^2 dx$ の近似値を十進 BASIC に組み込まれた擬似一様乱数 RND を 100000 個用いて計算しなさい. また, $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$ についても同様のことをしなさい.

例 33(重積分の計算) 一様乱数列を

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$$

とし, N を十分大きく取ると,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \doteq \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + \dots + f(x_N, y_N)}{N}$$

となる.

問題 16 例 33 の方法で $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ の近似値を十進 BASIC に組み込まれた擬似一様乱数 RND を 100000 組用いて計算しなさい. ただし,

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 & \text{for } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{for } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$