解析　前期試験のための練習問題

05/07/12　　担当　伊吹

1. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x-15}{x^2-9}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2+6}{2x^3+5x+7}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+5^{x+1}}{3^{x+2}+5^x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{2x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}}{(x-1)^2}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^\alpha\log x\quad(\alpha>0)$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$

2. 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(x^2+x+1)^{100}$　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$　(3) $y=\log(1+x^2)$

(4) $y=(x+1)^5(x-3)^7$　(5) $y=x^2\sin 2x$　(6) $y=x^2\log(1+x^2)$

(7) $y=e^{ax}\sin bx$　(8) $y=\dfrac{1}{\log x}$　(9) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

(10) $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$　(11) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　(12) $y=\tan^{-1}(ax)$

(13) $y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　(14) $y=\log(x+\sqrt{x^2+A})\quad(A\neq 0)$

3. 次の para-meter 表示された関数の $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(1) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$　(2) $x=at-a\sin t$, $y=a-a\cos t$

4. 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　(2) $\sin 3x\sin 2x$　(3) x^2e^{2x}

5. 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ.

(1) $f(x)=2\tan^{-1}x-x$　(2) $f(x)=x^{2n}e^{-x}$ (n は自然数)

(3) $f(x)=x^2-50\log x\quad(x>0)$

6. 次の関数の凹凸について調べよ.

(1) $f(x)=e^{-x^2}$　(2) $f(x)=x^2e^{-x}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　(4) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

7. 次の関数を Maclaurin 展開せよ．(ただし、$n=5$ まで計算せよ)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots$$

(1) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{8-x} = (8-x)^{\frac{1}{3}}$

(3) $f(x) = \log(1-2x)$

8. 関数 $f(x) = \log(1+x^2)$ について

(1) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．(教科書 p35 問 17 と同じ　ヒント：教科書 p35 例題 6)
(2) $f(x)$ の Maclaurin 展開を計算せよ．

9. 周の長さが一定の長さ a である扇形の中で，面積を最大にするものの中心角を以下のようにして求める．ただし，扇形の弧の長さと面積は次の式求められる．

$$(\text{弧の長さ}) = (\text{中心角}) \times (\text{半径}), \qquad (\text{面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{中心角}) \times (\text{半径})^2$$

(1) 扇形の中心角を θ とするとき，半径を a, θ を用いて表わせ．
(2) 扇形の中心角を θ とするとき，面積を a, θ を用いて表わせ．
(3) 面積を最大にする中心角とそのときの面積を求めよ．

10. 半径 a の球に内接する直円錐のうちで体積を最大にするものを求めよ．

11. 半径 a の球に内接する直円柱のうちで体積を最大にするものを求めよ．

12. 半径 a の円から扇形を切り取って漏斗を作り，体積を最大にしたい．
扇形の中心角をいくらにすればよいか．

13. xy 平面の第 1 象限の定点 (a, b) を通り傾きが $(-m)$ の直線 l を考える．
(1) l と x 軸の交点を A，l と y 軸との交点を B とするとき，A と B の座標を求めよ．
(2) 三角形 OAB の面積を最小にするように m を定めよ．
(3) $\mathrm{OA} + \mathrm{OB}$ を最小にするように m を定めよ．
(4) AB を最小にするように m を定めよ．