解析　偏微分法問題略解

08/12/09　　担当　伊吹

これは答えだけの略解とヒントなので，試験のときの解答は途中計算も必ず書いてください．

私が暗算で計算できないような問題で，答えだけの解答は０点とします．

これまで，ホームページに載せていた 1(5) の略解が間違っていたので訂正しました．

(2008/12/11　20:16)

これまで，ホームページに載せていた 9 (2),(3),(4) の略解の記述法が間違っていたので訂正しました．

(2008/12/15　10:00)

1. (1) $z_x = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 \quad , \quad z_y = -20x^3y + 20xy^3$

(2) $z_x = -2y(1-xy) \quad , \quad z_y = -2x(1-xy)$

(3) $z_x = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad z_y = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

(4) $z_x = \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \quad , \quad z_y = \dfrac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$

(5) $z_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad z_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(6) $z_x = \dfrac{\cos(x+\sqrt{y})}{\sin(x+\sqrt{y})} \quad , \quad z_y = \dfrac{\cos(x+\sqrt{y})}{2\sqrt{y}\sin(x+\sqrt{y})}$

2.

(1) $dz = df(x,y) = 3(x^2+y)dx + 3(x+y^2)dy$

(2) $dz = df(x,y) = \cos y dx - x\sin y dy$

(3) $dz = df(x,y) = \dfrac{2xdx+4ydy}{x^2+2y^2}$

3. (1) 接平面：$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$　(または $2x+2y-z=2$)

法線：$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

(2) 接平面：$2a(x-a)+2b(y-b)+2c(z-c)=0$　(または $ax+by+cz=1$)

法線：$\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{y-b}{b} = \dfrac{z-c}{c}$

4. (1) $\dfrac{dz}{dt} = 3f_x(3t,t^2) + 2tf_y(3t,t^2)$

(2) $\dfrac{dz}{dt} = -a\sin tf_x(a\cos t, b\sin t) + b\cos tf_y(a\cos t, b\sin t)$

5.

(1) ヒント　変数変換 $ax+by=u$, $x=v$ すなわち，$x=v$, $y=\dfrac{u-av}{b}$ とおき，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$ を示す.

(2) ヒント　変数変換 $xy=u$, $x=v$ すなわち，$x=v$, $y=\dfrac{u}{v}$ とおき，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$ を示す.

6.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2-ay}{y^2-ax}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x(2x^2-ay^2)}{y(2y^2-ax^2)}$

7. 極値をとる候補の点すべてについて，極値をとるかどうかチェックすること

(1) $x=3, y=2$ のとき，極小値 $f(3,2)=-2$ をとる.

(2) $x=2, y=1$ のとき，極小値 $f(2,1)=-11$ をとる.

(3) $x=2, y=-1$ のとき，極小値 $f(2,-1)=-8$ をとる.

(4) $x=2, y=0$ のとき，極小値 $f(2,0)=-4$ をとる.

8. (1) $x=1$ のとき，極大値 $y=1$,
$x=1$ のとき，極小値 $y=-1$ をとる.

(2) $x=2$ のとき，極大値 $y=2$,
$x=-2$ のとき，極小値 $y=-2$ をとる.

(3) $x=2$ のとき，極小値 $y=2$,
$x=2$ のとき，極大値 $y=-2$ をとる.

(4) $x=2^{\frac{1}{3}}$ のとき，極大値 $y=2^{\frac{2}{3}}$ をとる.

9. (1) 極値を取る候補の点は　$x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (複号同順ではない，4 通り)

(2) 極値を取る候補の点は　$x=\pm\sqrt{a}$, $y=\pm\sqrt{a}$ (複号同順)

(3) 極値を取る候補の点は　$x=\pm 2$, $y=\pm 2$ (複号同順)

(4) 極値を取る候補の点は　$x=\pm 2$, $y=\pm 1$ (複号同順)