

1. 次の関数の偏導関数を求めよ.

$$(1) \quad z = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

$$(2) \quad z = (1 - xy)^2$$

$$(3) \quad z = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$(4) \quad z = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$(5) \quad z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$(6) \quad z = \log \sin(x + \sqrt{y})$$

2. 次の関数の全微分 dz を求めよ.

$$(1) \quad z = f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$$

$$(2) \quad z = f(x, y) = x \cos y$$

$$(3) \quad z = f(x, y) = \log(x^2 + 2y^2)$$

3. 次の曲面の与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ.

$$(1) \quad x^2 + y^2 - z = 0 \quad (1, 1, 2)$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (a, b, c)$$

4. 次の各場合に $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

$$(1) \quad z = f(3t, t^2)$$

$$(2) \quad z = f(a \cos t, b \sin t)$$

5. 次のことを証明せよ.

(1) a, b が 0 と異なる定数の時, $b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$ を満たす x, y の関数は

$ax + by$ だけの関数である.

(ヒント 変数変換 $ax + by = u$, $x = v$ を考えよ)

(2) $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$ を満たす関数は積 xy だけの関数である.

(ヒント 変数変換 $xy = u$, $x = v$ を考えよ)

6. 次の関係式によって定まる陰関数を $y = f(x)$ とするとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

(2) $x^4 + y^4 = ax^2y^2$

7. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $z = f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2y$

(2) $z = f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2 - 9x - 8y + 2$

(3) $z = f(x, y) = x^3 + 12xy - 8y^3$

(4) $z = f(x, y) = x^3 + xy^2 - 3(x^2 - y^2)$

8. 次の関係式によって定まる陰関数を $y = f(x)$ とするとき, その極値を求めよ.

(1) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = 0$

(2) $F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4 = 0$

(3) $F(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 16 = 0$

(4) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$

9. 次の条件付き極値をとる点の候補者を求めよ.(ただし, a は正の定数とする)

(1) 条件 $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ のもとで関数 $f(x, y) = xy$ の極値

(2) 条件 $xy = a$ のもとで関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値

(3) 条件 $x^2 + xy + y^2 = 12$ のもとで関数 $f(x, y) = x + y$ の極値

(4) 条件 $x^2 + y^2 = 5$ のもとで関数 $f(x, y) = 4x + 2y$ の極値