Appendix A

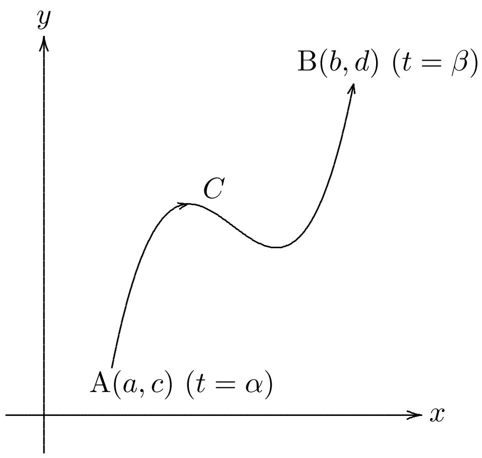
線積分

xy 平面上のある領域 Ω で連続な２つの関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ に対して

(A - 1) $\qquad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \omega$

を１次微分形式 (1-form) という．

また，この領域内に曲線 C が次のように媒介変数 (parameter) 表示されているとする[1]



(A - 2) $\qquad C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta) \end{cases}$

この曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$ を次のように定義する．

(A - 3) $\qquad \displaystyle\int_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_\alpha^\beta \{P\left(x(t), y(t)\right)\frac{dx}{dt} + Q\left(x(t), y(t)\right)\frac{dy}{dt}\}\,dt$

ただし，この積分は区分的に滑らかな曲線上での積分なので，小区間に分けて積分することとする．

曲線 C に対して逆向きの曲線を $-C$ と表わし，

(A - 4) $\qquad -C : \begin{cases} x = x(\alpha + \beta - t) \\ y = y(\alpha + \beta - t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta) \end{cases}$

のように定義される．すると公式

(A - 5) $\qquad \displaystyle\int_{-C} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = -\int_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$

[1]媒介変数表示された曲線が区分的に滑らかであるというのは，関数 $x(t)$ と $y(t)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ で連続であって，$[\alpha, \beta]$ を分割した各小区間 $[\alpha, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_{k-1}, \beta]$ で C^1-級になっていることをいう．このような関数を区分的に滑らかな関数という．

また，この積分は曲線の媒介変数表示の仕方に関係なく曲線の形にのみ関係する.（このことは置換積分の公式からわかる）

曲線が閉曲線[2] であるときは,

$$\oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

と書かれる.

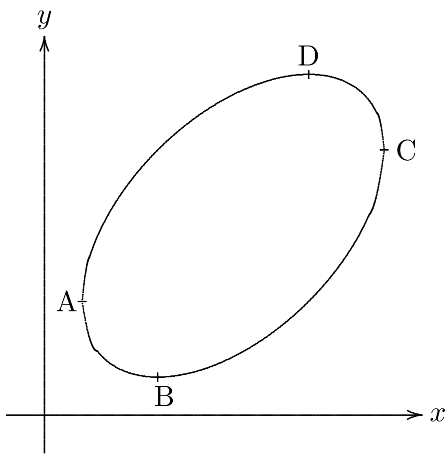
次の積分定理が成り立つ.

定理 A −1 D を Ω 内の領域とし，その境界 C は区分的に滑らかな曲線とする．また，その曲線 C は媒介変数表示され，左回りに向きがつけられているとする．また，$P(x,y)$, $Q(x,y)$ は C^1-級の関数とする．このとき，等式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \tag{A - 6}$$

が成り立つ.

[**証明**] 領域 D の境界の DAB の部分を $x = \varphi_1(y)$, BCD の部分を $x = \varphi_2(y)$ と表わすことにする. $(c \leqq y \leqq d)$ ．すると,



$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \int_c^d dy \int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx$$

$$= \int_c^d [Q(x,y)]_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)}\, dy$$

$$= \int_c^d \{Q(\varphi_2(y), y) - Q(\varphi_1(y), y)\}\, dy$$

$$= \int_{\mathrm{BCD}} Q(x,y)\, dy - \int_{\mathrm{BAD}} Q(x,y)\, dy$$

$$= \int_{\mathrm{BCD}} Q(x,y)\, dy + \int_{\mathrm{DAB}} Q(x,y)\, dy$$

$$= \oint_C Q(x,y)\, dy$$

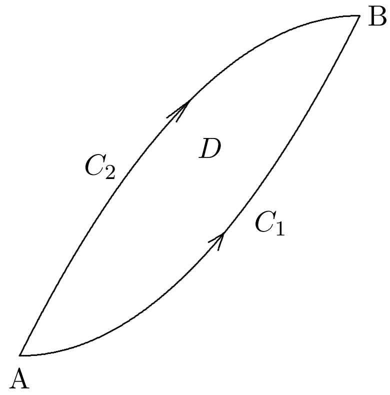
同様の議論を行えば,

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \oint_C P(x,y)\, dx$$

が得られ，定理が証明された. [証明終]

この定理から次の系が得られる.

[2]始点と終点が等しい場合，すなわち $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$ となっているとき



系 1 Ω が単連結[3] であって，Ω で $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ が成り立てば，線積分 $\displaystyle\int_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$ は始点と終点にのみ関係し，その経路に関係しない．

[**証明**] 右の図のように，点 A から点 B までの２通りの経路 C_1，C_2 があったとしよう．この２つの経路は交わらないとする．交わらない場合を証明できれば，交わる場合も容易に証明できる．

２つの経路 C_1，C_2 で囲まれた領域を D とし，C_1 と C_2 の逆向きの曲線 $-C_2$ を合わせた曲線を C とおく．すると，前の定理より，

$$\oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

また，

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \\ &= \int_{C_1} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) + \int_{-C_2} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \\ &= \int_{C_1} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) - \int_{C_2} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \end{aligned}$$

より，

$$\int_{C_1} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_{C_2} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

を得る．よって，線積分は経路によらない．[証明終]

問題 A -1 ２つの１次微分形式 $\omega_1 = xdx + ydy$，$\omega_2 = ydx + xdy$ の O から B までの線積分を以下の経路について計算せよ．ただし，O$(0,0)$，A$(2,0)$，B$(2,4)$，C$(0,4)$ とする．

(1) $x(t) = t$，$y(t) = 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2)$

(2) $x(t) = t$，$y(t) = t^2 \quad (0 \leqq t \leqq 2)$

(3) $x(t) = \dfrac{1}{2}t^2$，$y(t) = 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2)$

(4) 折れ線 OAB

(5) 折れ線 OCB

[3] Ω が単連結であるとは，Ω に含まれる任意の単一閉曲線で囲まれた領域の内部に Ω 以外の点が存在しないことである．また，単一閉曲線とは始点と終点以外に交わらない (共有点を持たない) 閉曲線のことである．

問題 A -2 1次微分形式 $\omega = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ の A から C までの線積分を以下の経路について計算せよ．ただし，A$(-1,-1)$, B$(1,-1)$, C$(1,1)$, D$(-1,1)$ とする．

(1) 折れ線 ABC

(2) 折れ線 ADC

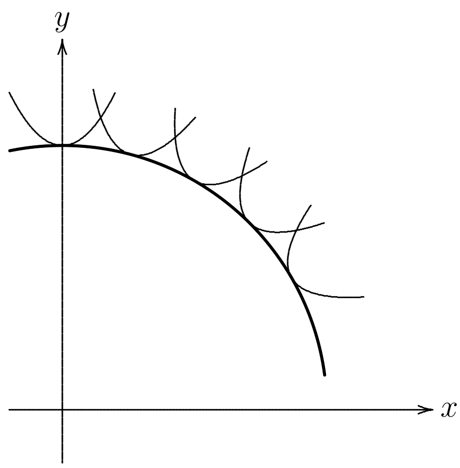
(3) $x(t)=\sqrt{2}\cos t$, $y(t)=\sqrt{2}\sin t \quad (-\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4})$

(4) $x(t)=\sqrt{2}\cos(-t)$, $y(t)=\sqrt{2}\sin(-t) \quad (-\dfrac{5\pi}{4} \leqq t \leqq -\dfrac{\pi}{4})$

Appendix B

包絡線

xy 平面上に α を para-meter とする曲線の族 $f(x,y,\alpha)=0$ が与えられたとき，そのすべての曲線に接する曲線を **包絡線** という．



いま，この包絡線と曲線 $f(x,y,\alpha)=0$ との接点を $x=x(\alpha)$, $y=y(\alpha)$ とすると

(B - 1) $\qquad f(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)=0$

を満たし，包絡線の接線方向ベクトル $\left(\dfrac{dx}{d\alpha},\dfrac{dy}{d\alpha}\right)$ は曲線族 $f(x,y,\alpha)=0$ の法線方向ベクトル (f_x,f_y) と直交している．すなわち，

(B - 2) $\qquad f_x(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)\dfrac{dx}{d\alpha}+f_y(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)\dfrac{dy}{d\alpha}=0$

が成り立っている．また，(B - 1) を α で微分すると，

(B - 3) $\qquad f_x(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)\dfrac{dx}{d\alpha}+f_y(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)\dfrac{dy}{d\alpha}+f_\alpha(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)=0$

が得られ，(B - 2) と (B - 3) より，

(B - 4) $\qquad f_\alpha(x(\alpha),y(\alpha),\alpha)=0$

が得られる．以上より，曲線族 $f(x,y,\alpha)=0$ の包絡線を求めるには，x と y に関する連立方程式

(B - 5) $\qquad \begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$

の解 $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ を求めれば，それが α を para-meter とする包絡線の para-meter 表示になっている．また，この連立方程式から α を消去して得られる関係式 $g(x, y) = 0$ が包絡線の方程式となっている．ただし，そうして得られた曲線上で $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となっている場合には，得られた曲線は元の曲線族の特異点の軌跡になっている．

例題 1 a を para-meter とする曲線族 $y + ax = a^2$ の包絡線は

$$f(x, y, a) = y + ax - a^2 = 0 \quad , \quad f_a(x, y, a) = x - 2a = 0$$

より，

$$x = 2a \quad , \quad y = -a^2$$

すなわち，放物線

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

が得られる．曲線族には，$f_y = 1$ より，特異点はないので，求めたものは包絡線になっている．

問題 B -3 次の曲線族の包絡線を求めよ．

(1) $y = a^2 x + a$

(2) $x \cos a + y \sin a = 1$

(3) $\dfrac{x}{\cos a} + \dfrac{y}{\sin a} = 1$

Appendix C

行列と行列式の微分法

ベクトルや行列の成分が x の関数となっているとき，それらの微分や積分を各成分を微分や積分したものと考えよう．すなわち，

$$\boldsymbol{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix} \ , \ A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

とするとき，$\dfrac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}$ ，$\dfrac{dA(x)}{dx}$ を次のように定める．

$$\frac{d\boldsymbol{u}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{du_1(x)}{dx} \\ \dfrac{du_2(x)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{du_n(x)}{dx} \end{bmatrix} \ , \ \frac{dA(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{da_{11}(x)}{dx} & \dfrac{da_{12}(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{da_{1n}(x)}{dx} \\ \dfrac{da_{21}(x)}{dx} & \dfrac{da_{22}(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{da_{2n}(x)}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{da_{m1}(x)}{dx} & \dfrac{da_{m2}(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{da_{mn}(x)}{dx} \end{bmatrix}$$

同様に積分についても $\displaystyle\int \boldsymbol{u}(x)\,dx$ ，$\displaystyle\int A(x)\,dx$ を次のように定める．

$$\int \boldsymbol{u}(x)\,dx = \begin{bmatrix} \int u_1(x)\,dx \\ \int u_2(x)\,dx \\ \vdots \\ \int u_n(x)\,dx \end{bmatrix}$$

$$\int A(x)\,dx = \begin{bmatrix} \int a_{11}(x)\,dx & \int a_{12}(x)\,dx & \cdots & \int a_{1n}(x)\,dx \\ \int a_{21}(x)\,dx & \int a_{22}(x)\,dx & \cdots & \int a_{2n}(x)\,dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int a_{m1}(x)\,dx & \int a_{m2}(x)\,dx & \cdots & \int a_{mn}(x)\,dx \end{bmatrix}$$

すると，次の公式が成り立つ．

定理 C−1 $A(x)$ や $B(x)$ を次の演算が定義できる行列やベクトルとするとき，

(1) $\dfrac{d}{dx}\{A(x) \pm B(x)\} = \dfrac{dA(x)}{dx} \pm \dfrac{dB(x)}{dx}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{cA(x)\} = c\dfrac{dA(x)}{dx}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{A(x)B(x)\} = \dfrac{dA(x)}{dx}B(x) + A(x)\dfrac{dB(x)}{dx}$

(4) $A(x)$ が正則であるとき，$\dfrac{dA(x)^{-1}}{dx} = -A(x)^{-1}\dfrac{dA(x)}{dx}A(x)^{-1}$

[証明] (1),(2),(3) の証明は省略する．(4) について証明しよう．

$A(x)^{-1}A(x) = I$(単位行列) であるので，この両辺を (3) を用いて微分すると，

$$\frac{dA(x)^{-1}}{dx}A(x) + A(x)^{-1}\frac{dA(x)}{dx} = O$$

$$\frac{dA(x)^{-1}}{dx}A(x) = -A(x)^{-1}\frac{dA(x)}{dx}$$

この両辺に右から $A(x)^{-1}$ をかければ (4) 式を得る．　[証明終]

つぎに行列式の微分をしてみよう．$A(x)$ を m 次正方行列としよう．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 C−2

(C - 1) $\dfrac{\det A(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}|A(x)| = A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_m(x)$

(C - 2) $\dfrac{\det A(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}|A(x)| = \hat{A}_1(x) + \hat{A}_2(x) + \cdots + \hat{A}_m(x)$

ここで，$A_k(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2m}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{da_{k1}(x)}{dx} & \dfrac{da_{k2}(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{da_{km}(x)}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mm}(x) \end{vmatrix}$

あるいは，$\hat{A}_k(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & \dfrac{da_{1k}(x)}{dx} & \cdots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & \dfrac{da_{2k}(x)}{dx} & \cdots & a_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & \dfrac{da_{mk}(x)}{dx} & \cdots & a_{mm}(x) \end{vmatrix}$ とする．

[証明]　行列式の定義より

$$\det A(x) = \sum \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_k) a_{1p_1}(x) a_{2p_2}(x) \cdots a_{mp_m}(x)$$

これより，

$$\begin{aligned}
\frac{d \det A(x)}{dx} &= \sum \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_k) \left\{ \frac{da_{1p_1}(x)}{dx} a_{2p_2}(x) \cdots a_{mp_m}(x) + \right. \\
&\qquad \left. + a_{1p_1}(x) \frac{da_{2p_2}(x)}{dx} \cdots a_{mp_m}(x) + \cdots + a_{1p_1}(x) a_{2p_2}(x) \cdots \frac{da_{mp_m}(x)}{dx} \right\} \\
&= \sum \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_k) \frac{da_{1p_1}(x)}{dx} a_{2p_2}(x) \cdots a_{mp_m}(x) + \\
&\qquad + \sum \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_k) a_{1p_1}(x) \frac{da_{2p_2}(x)}{dx} \cdots a_{mp_m}(x) + \cdots + \\
&\qquad\qquad + \sum \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_k) a_{1p_1}(x) a_{2p_2}(x) \cdots \frac{da_{mp_m}(x)}{dx} \\
&= A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_m(x)
\end{aligned}$$

これで (C - 1) が得られた．行列式は行列を転置しても値がかわらないことと (C - 1) を用いれば，(C - 2) が得られる．　[証明終]

Appendix D

十進BASICの簡単な説明

(仮称) 十進 BASIC は文教大学の白石和夫氏が作成した BASIC のプログラミング言語である．ここでは，関数のグラフを書くプログラムの例について説明する．詳しくは，download した自己解凍ファイルに含まれる『TUTORIAL.PDF』を参考にされるとよい．次のホームページ

http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/

から最新の (仮称) 十進 BASIC が download でき，そのリンク先にも有用な情報が含まれている．

プログラム例 1(関数 $y = x^3 - 6x$ のグラフを描く)

```
10␣LET␣␣left=-5
20␣LET␣␣right=5
30␣LET␣␣bottom=-10
40␣LET␣␣top=10
50␣LET␣␣h=0.02
60␣SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
70␣DRAW␣GRID
80␣DRAW␣AXES
90␣def␣f(x)=x^3-6*x
100␣for␣x=-5␣to␣5-h␣step␣h
110␣␣␣LET␣␣x1=x
120␣␣␣LET␣␣y1=f(x1)
130␣␣␣LET␣␣x2=x+h
140␣␣␣LET␣␣y2=f(x2)
150␣␣␣plot␣lines:␣x1,y1;x2,y2
160␣next␣x
170␣END
```

プログラム例 1 の説明

このプログラムにおいては行番号が付けてあるが，説明のために付けたもので，なくてもかまわない.（ないほうがよいかも知れない）

10-40 行目 ：変数 left,right,bottom,top に数値を代入している．この数値は 60 行目でグラフィック座標の左右下上を指定するのに用いられている.

50 行目 ：グラフを折線で描くときの x の幅を指定する変数 h に数値を代入している.

60 行目 ：グラフィック座標の左右上下の座標を指定している.

70 行目 ：グラフィック画面の格子を描いている.

80 行目 ：グラフィック画面で座標軸を描いている.

90 行目 ：関数 $f(x)=x^3-6x$ を定義している.

100-160 行目 ：x の値を -5 から $5-h$ まで h ずつ増やしながらその間の命令を繰り返す.

110-120 行目 ：折線を描く線分の始点の座標 $x1$ と $y1$ に数値を代入している.

130-140 行目 ：折線を描く線分の終点の座標 $x2$ と $y2$ に数値を代入している.

150 行目 ：グラフィック座標 $(x1, y1)$ と $(x2, y2)$ の点を線分で結んでいる.

160 行目 ：x の値を h だけ増やして，100 行目に戻る．x の値が $5-h$ を超えたら戻らない..

170 行目 ：プログラムを終了する.

★ `LET` **変数** `=` **数値または数式** (代入文)

★ `SET WINDOW` **左端** `,` **右端** `,` **下** `,` **上** (グラフィック座標の指定)

★ `for` **変数**`=`**数値** 1 `to` **数値** 2 `step` **数値** 3

$\cdots$

`next` **変数**

変数の値を数値 1 から数値 2 まで数値 3 ずつ増やしながら $\cdots$ を繰り返し実行する.

★ `DRAW GRID` (格子を描く)

★ `DRAW AXES` (座標軸を描く)

★ `plot lines:` **数値** 1, **数値** 2; **数値** 3, **数値** 4

(数値 1, 数値 2) から (数値 3, 数値 4) まで線分を引く.

★ `END` (プログラムを終了する)

プログラム例 2(媒介変数表示された曲線：サイクロイド (cycloid) を描く)

```
LET␣␣left=-1
LET␣␣right=20
LET␣␣bottom=-10
LET␣␣top=10
LET␣␣h=0.02
SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
DRAW␣GRID
DRAW␣AXES
def␣f(t)=t-sin(t)
def␣g(t)=1-cos(t)
for␣t=0␣to␣20-h␣step␣h
␣␣␣LET␣␣x1=f(t)
␣␣␣LET␣␣y1=g(t)
␣␣␣LET␣␣x2=f(t+h)
␣␣␣LET␣␣y2=g(t+h)
␣␣␣plot␣lines:␣x1,y1;x2,y2
next␣t
END
```

以下スペースが空いたので，条件分岐について説明する．

★ `IF` **条件** `THEN`
　　命令 1
　`ELSE`
　　命令 2
　`END IF`

条件が真ならば（正しければ）命令 1 を実行し，偽ならば（正しくなければ）命令 2 を実行する．命令 2 をする必要がなければ，ELSE と命令 2 は省略する．

そのほか，条件によって繰り返しが行われる次のような構文もある．

(1) ★ `DO WHILE` **条件**
　　命令
　`LOOP`

(2) ★ `DO UNTIL` **条件**
　　命令
　`LOOP`

(3) ★ `DO`
　　命令
　`LOOP WHILE` **条件**

(4) ★ `DO`
　　命令
　`LOOP UNTIL` **条件**

プログラム例 3(微分方程式の Euler 近似)

```
REM␣Euler 法による近似解法␣dx/dt=f(x,y)␣,␣dy/dt=g(x,y)
LET␣␣left=-10
LET␣␣right=10
LET␣␣bottom=-10
LET␣␣top=10
LET␣␣h=0.02
SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
DRAW␣GRID
DRAW␣AXES
def␣f(x,y)=-y
def␣g(x,y)=x
LET␣␣x0=5
LET␣␣y0=0
10␣for␣t=0␣to␣7␣step␣h
␣␣␣␣␣␣LET␣␣x=x0+f(x0,y0)*h
␣␣␣␣␣␣LET␣␣y=y0+g(x0,y0)*h
␣␣␣␣␣␣plot␣lines:␣x0,y0;x,y
␣␣␣␣␣␣LET␣␣x0=x
␣␣␣␣␣␣LET␣␣y0=y
␣␣␣␣␣␣wait␣delay␣0.001␣␣␣!␣時間待ち
␣␣␣next␣t
␣GET␣POINT:␣x0,y0␣␣␣␣␣␣!␣マウスをクリックした点の座標を所得
␣GOTO␣10
␣END
```

★ `REM` **注釈文** (注釈文)

REM の後に書かれたことはプログラムの実行に影響しない.

REM は行頭でしか用いられない. 行の途中で注釈を入れたいときは『!』を用いる.

★ `wait delay` **時間** (時間待ちする)

★ `GET POINT: x , y`

マウスをクリックするまで待ち, クリックした点の座標 (x, y) を所得する.

★ `GOTO` **行番号**

プログラムの実行を指定した行番号までとばす.

Appendix E

行列の標準化 (Jordan の標準形)

A を正方行列とする．

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

であるとき，λ を A の **固有値** といい，$\boldsymbol{x}$ を A の固有値 λ に対する **固有ベクトル** という．

定理 E－1 A : n 次正方行列とする．次の同値関係が成り立つ．

A : 正則行列 $\Leftrightarrow$ $\det A = |A| \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow$ A の n 個の列ベクトルが 1 次独立
$\Leftrightarrow$ A の n 個の行ベクトルが 1 次独立
$\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$ しか持たない．

定理 E－2 A : n 次正方行列とする．

λ : A の固有値 $\Leftrightarrow f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = 0$

($f_A(\lambda)$ を A の **固有多項式**，$f_A(\lambda) = 0$ を A の **固有方程式** という)

定理 E－3 (代数学の基本定理)

n 次多項式

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

($a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ は複素数)

は次の形に因数分解される．

$$f(z) = (z - \alpha_1)^{n_1}(z - \alpha_2)^{n_2} \cdots (z - \alpha_k)^{n_k}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ は複素数，$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$)

代数学の基本定理より，固有多項式は

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

の形に因数分解される．このとき，n_i を 固有値 λ_i の **重複度** という．

$$W_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間となっており，これを A の固有値 λ_i に対する **固有空間** という．

定理 E−4 $\{\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{im_i}\}$ を W_{λ_i} に属する 1 次独立な組とするとき，それらをあわせた，

$$\{\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1m_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2m_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{k1}, \boldsymbol{p}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{km_k}\}$$

は 1 次独立である．

ある正則行列 P によって，$P^{-1}AP$ が対角行列にできるとき，A を **対角化可能** であるという．

定理 E−5 A が対角化可能であるための必要条件はすべての固有値 λ_i に対して次のことが成り立つことである．ただし，n_i は固有値 λ_i の重複度とする．

$$\dim W_{\lambda_i} = n_i \quad (\Leftrightarrow n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i I) = n_i)$$

またこのとき，W_{λ_i} の基底を $\{\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{in_i}\}$ とすれば，それらをすべて列ベクトルとする n 次正方行列

$$P = [\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1n_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{k1}, \boldsymbol{p}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{kn_k}]$$

は正則行列であり，

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理 E−6 A のすべての固有値の重複度が 1 であれば，A は対角化可能である．

対称行列の直交行列による対角化

${}^tA = A$ となる行列を **対称行列** という．

${}^tAA = I$ (すなわち，${}^tA = A^{-1}$) となる行列を **直交行列** という．

定理 E−7 A : n 次正方行列とする．次の同値関係が成り立つ．

A : 直交行列 $\Leftrightarrow$ A の n 個の列ベクトルは $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底である．

$\Leftrightarrow$ A の n 個の行ベクトルはが $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底である．

定理 E−8 A : 直交行列とすると，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
すなわち，直交行列によりベクトルが変換されても，内積・長さ・なす角を変えない．

定理 E−9 A が n 次実対称行列であれば，A の固有値はすべて実数となり，異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．また，A は対角化可能となり ($\dim W_{\lambda_i} = n_i$)，W_{λ_i} の基底 $\{\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{in_i}\}$ を正規直交基底にとり (Gram-Schmidt の直交化法により可能)，

$$P = [\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1n_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{k1}, \boldsymbol{p}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{kn_k}]$$

とおけば，P は直交行列となり，A は直交行列によって対角化できる．

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = D \quad (D \text{ は対角行列})$$

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の **2 次形式** という．（ここで，$a_{ij} = a_{ji}$ とする）

いま，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (A は対称行列) とすれば，

2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ は $Q(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と書ける．

対称行列 A は直交行列 P によって対角化できるので (${}^tPAP = D$:対角行列)，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$) とおけば，

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})AP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}D\boldsymbol{y} = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

と書ける．(ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の重複を許した固有値である).

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

を 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の **標準形** という．

ある正の定数 α があって，2 次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \geqq \alpha\|\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つとき，$Q(\boldsymbol{x})$ は **正定値** であるという．

定理 E−10 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値であるための必要十分条件は A のすべての固有値が正であることである．

定理 E−11 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値であるための必要十分条件は次の不等式が成り立つことである．

$$a_{11} > 0 \ , \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ , \ \cdots \ , \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Jordan の標準形

正方行列 A が対角化可能でないときには,

$$\widetilde{W}_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid \exists l \quad (A - \lambda_i I)^l \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

とおく．これを固有値 λ_i に対する **一般化された固有空間** という.

定理 E−12 (Cayley-Hamilton の定理)

A の固有多項式を

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \end{aligned}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} f_A(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I \\ &= (A - \lambda_1 I)^{n_1}(A - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (A - \lambda_k I)^{n_k} = O \end{aligned}$$

が成り立つ.

いま，A の固有多項式 $f_A(\lambda)$ が 1 次式に因数分解されているとし，因子 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ を取り除いた多項式 $f_A(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ を $f_{A,i}(\lambda)$ とおく．このとき $\{f_{A,i}(\lambda)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ は共通因子を持たないのでそれらは互いに素であり，それらの最大公約数は 1 である.

定理 E−13 $\{f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \cdots\ ,\ f_k(x)\}$ が互いに素である (最大公約数が 1 である) とき，次の式を満たす多項式 $\{g_1(x)\ ,\ g_2(x)\ ,\ \cdots\ ,\ g_k(x)\}$ が存在する.

$$g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + \cdots + g_k(x)f_k(x) \equiv 1$$

上で述べた多項式 $\{f_{A,i}(\lambda)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ に対して，定理 E - 13 を用いると,

$$g_1(\lambda)f_{A,1}(\lambda) + g_2(\lambda)f_{A,2}(\lambda) + \cdots + g_k(\lambda)f_{A,k}(\lambda) \equiv 1$$

となる多項式 $\{g_i(\lambda)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ が存在する．これより,

$$g_1(A)f_{A,1}(A) + g_2(A)f_{A,2}(A) + \cdots + g_k(A)f_{A,k}(A) \equiv I$$

となり，$g_i(A)f_{A,i}(A) = M_i$ とおくと,

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_k \equiv I \quad , \quad M_i M_j \equiv O \ \ (i \neq j) \quad , \quad M_i^2 = M_i$$

このことを用いると，次の定理が成り立つことがわかる.

定理 E −14 (1) 一般化された固有空間 $\{\widetilde{W}_{\lambda_i}\}$ は射影作用素 M_i の像 (image) となっている．また，$\widetilde{W}_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid (A - \lambda_i I)^{n_i}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ である．

(2) $\{\widetilde{W}_{\lambda_i}\}$ の次元は固有値の重複度 n_i に等しい．

(3) $\boldsymbol{R}^n$ は一般化された固有空間 $\{\widetilde{W}_{\lambda_i}\}_{i=1,2,\cdots,k}$ の直和になっている．

すなわち，

$$\boldsymbol{R}^n = \widetilde{W}_{\lambda_1} \oplus \widetilde{W}_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_{\lambda_k}$$