

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．また，カッコの中に示されている条件を満たす解を求めよ．(30点)

$$(1) \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} - 15v = 0 \quad (\text{初期条件 } v(0) = 3, \frac{dv}{dt}(0) = 1)$$

$$(2) \quad \frac{d^2v}{dx^2} - 2\frac{dv}{dx} + \frac{5}{4}v = 0 \quad (\text{境界条件 } v(0) = 1, v(\pi) = 1)$$

$$(3) \quad \frac{d^2v}{dt^2} - 6\frac{dv}{dt} + 9v = 0 \quad (\text{初期条件 } v(0) = 1, \frac{dv}{dt}(0) = 5)$$

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ．(30点)

$$(1) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt} + u = e^{2t}$$

$$(2) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} - 4u = 3e^t$$

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} = 2t + 1$$

3. 次の行列 A を対角化または Jordan の標準形にせよ．($P^{-1}AP = D$ (対角行列) または J (Jordan の標準形) となる P, D, J を求めよ．)

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (20 \text{ 点})$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (10 \text{ 点})$$

4. 次の例と同様の方法によって，微分方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = 2te^t$$

の一般解を求めよ．(15 点)

例 $\frac{d^2u}{dt^2} - 5\frac{du}{dt} + 6u = 4t$

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\left(\frac{d}{dt} - 3\right)u = 4t$$
$$u_1(t) = \left(\frac{d}{dt} - 3\right)u \text{ とおくと, } \left(\frac{d}{dt} - 2\right)u_1(t) = 4t$$

これを $u_1(t)$ について解くと，

$$u_1(t) = e^{2t} \left(\int e^{-2t} 4t \, dt + c_1 \right) = e^{2t} (-2te^{-2t} - e^{-2t} + c_1) = -2t - 1 + c_1 e^{2t}$$

これより，

$$\left(\frac{d}{dt} - 3\right)u = u_1(t) = -2t - 1 + c_1 e^{2t}$$

今度はこれを $u(t)$ について解くと，

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{3t} \left\{ \int e^{-3t} (-2t - 1 + c_1 e^{2t}) \, dt + c_2 \right\} \\ &= e^{3t} \left\{ \left(\left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \right) e^{-3t} + \frac{2}{9} e^{-3t} - c_1 e^{-t} \right) + c_2 \right\} \\ &= \frac{2}{3}t + \frac{5}{9} - c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

5. 次の定差方程式の一般解を以下の手順に従って求めよ .

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ここで , $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ とおくと ,

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n + \mathbf{f} \text{ と書ける .}$$

(1) 行列 A 対角化せよ . ($P^{-1}AP = D$ (対角行列) となる P , D を求めよ .)(5 点)

(2) $\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} z_n \\ w_n \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{u}_n$, $\mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{f}$ とおくと上の定差方程式は

$$\mathbf{v}_{n+1} = D\mathbf{v}_n + \mathbf{g}$$

となることを示せ . (5 点)

(3) (2) で得られた定差方程式の一般解 $\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} z_n \\ w_n \end{bmatrix}$ を求めよ .

ただし , 単独の定差方程式 $a_{n+1} = \lambda a_n + \gamma$ の一般解は $\lambda \neq 1$ のとき

$$a_n = \frac{\gamma}{1 - \lambda} + c\lambda^n$$

で与えられる . ここで c は任意の定数である . (10 点)

(4) 元の定差方程式の一般解 $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ を求めよ . (5 点)

6. 次の微分方程式の一般解を以下の手順に従って求めよ．(小問(1)は5.(1)を解答した人は解答しないこと)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25t \\ 25t \end{bmatrix}$$

ここで, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 25t \\ 25t \end{bmatrix}$ とおくと,

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \text{ と書ける.}$$

- (1) 行列 A 対角化せよ．($P^{-1}AP = D$ (対角行列) となる P , D を求めよ．)(5点)

- (2) $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{g}(t) = P^{-1}\mathbf{f}(t)$ とおくと上の方程式は

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = D\mathbf{v}(t) + \mathbf{g}(t)$$

となることを示せ．(5点)

- (3) (2) で得られた方程式の一般解 $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$ を求めよ．(10点)

- (4) 元の方程式の一般解 $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ を求めよ．(5点)