

第I章

微分方程式

§0 微分方程式とは

微分方程式はさまざまな自然現象や社会現象を記述するのによく用いられている。

微分方程式の例を述べよう。(以下の例において、 t は時刻を表わす)

例 1 (落下運動の方程式)

x : 物体の高さ , g : 重力加速度 (約 9.8m/sec^2)

$$(0-1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

例 2 (人口増加モデル 1 : マルサスの人口法則)

$p(t)$: 時刻 t における人口 , a : 人口増加率 (定数)

$$(0-2) \quad \frac{dp(t)}{dt} = ap(t)$$

例 3 (人口増加モデル 2 : ロジスティック方程式)

$p(t)$: 時刻 t における人口 , a : 人口増加率 (定数)

$$(0-3) \quad \frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

$-bp^2$: 居住空間, 資源, 食料などによる競争に関する項 (b :定数)

例 4 (技術革新の普及：ロジスティック方程式)

N : 農業従事者総数 , c : 定数

$p(t)$: 時刻 t における新技術を取り入れた農業従事者数

$$(0-4) \quad \frac{dp}{dt} = cp(N-p)$$

例 5 (捕食者-被食者モデル：Lotka-Volterra の微分方程式)

F : 海の特定区域におけるサメに食べられるある種の魚 (fish) の個体数

S : 同区域におけるサメ (shark) の個体数

$$(0-5) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dt} = (a - bF - cS)F \\ \frac{dS}{dt} = (-k + \lambda F)S \end{cases}$$

ここで , a, c, k, λ は正の定数で , b は非負の定数である .

例 6 (振り子の運動方程式)

θ : 振り子の下向き垂直方向からの角度 , l : ひもの長さ

$$(0-6) \quad l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

例 7 (惑星の運動方程式)

太陽を原点にとり , 惑星の軌道面に xy 座標を導入する . C を正の定数として ,

$$(0-7) \quad \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -C \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -C \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

と書ける .

例 8 (経済学の市場モデル)

m 個の財について,

p_i : 第 i 番目の財の価格

$x_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$: 第 i 番目の財の需要量

$y_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$: 第 i 番目の財の供給量

$$(0-8) \quad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = k_1 (x_1(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_1(p_1, p_2, \dots, p_m)) \\ \frac{dp_2}{dt} = k_2 (x_2(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_2(p_1, p_2, \dots, p_m)) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dp_m}{dt} = k_m (x_m(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_m(p_1, p_2, \dots, p_m)) \end{cases}$$

ここで, 各 k_i は正の定数で調整速度とよばれている. 方程式の右辺に現れる

$$x_i(p_1, p_2, \dots, p_m) - y_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

を $E_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$ であらわし, これを超過需要関数とよぶ.

例 9 (直交曲線群)

xy 平面上の曲線群

$$(0-9) \quad F(x, y, c) = 0$$

に含まれるすべての曲線と直交する曲線をこの曲線群の直交曲線という. 曲線群の曲線上の各点における接線の傾きは, 陰関数の定理より

$$(0-10) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

で与えられる. よって, これと直交する曲線の接線の傾きは

$$(0-11) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}$$

となるので, 直交曲線のみたすべき微分方程式は (0-9) と (0-11) から parameter c を消去して得られる方程式である.

例えば, 放物線群 $y - cx^2 = 0$ の直交曲線は $\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1}{-2cx}$, $c = \frac{y}{x^2}$ より,

$$(0-12) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

のように，独立変数 x と 未知関数 y とそれらの導関数 $y', y'', \dots, y^{(n)}$ の間の関係式によって与えられる．未知関数の最高次の導関数が n 次導関数のとき，この微分方程式を n 階 (常) 微分方程式 という．

また，未知関数と関係式が2個以上の場合もある．

[illegible]

上記の 2 つの方程式は未知関数の数を増やすことによって，次のような 1 階の連立微分方程式に帰着することができる．

[illegible]

また、 $(0-13)$ 、 $(0-14)$ 、 $(0-15)$ がそれぞれ次の $(0-16)$ 、 $(0-17)$ 、 $(0-18)$ のように書かれているとき、正規形に書かれているという。

$$(0 - 16) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

[illegible]

[illegible]

x のある区間で微分方程式を満たす関数を微分方程式の解とよぶが、通常、微分方程式の解は無数に存在する。方程式 (0 - 13) や (0 - 16) の方程式の場合には、 n 個の任意定数を含んだ解が存在するが、そのような解を 一般解 とよぶ。任意定数を含まない解 (任意定数にある数が代入された解) を 特殊解 とよび、一般解からは得られない解を 特異解 とよぶ。また、(0 - 14) や (0 - 17) の方程式の一般解は $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 個の任意定数を含み、(0 - 15) や (0 - 18) の方程式の一般解は m 個の任意定数を含む。

無数にある解の中から、特定の解を定めるためには、付帯条件を与えておく必要がある。例えば、(0 - 13) や (0 - 16) の場合には、

$x = x_0$ において、 $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ の値を指定する。

(0 - 14) や (0 - 17) の場合には、

$x = x_0$ において、

$y_1(x_0), y_1'(x_0), \dots, y_1^{(n_1-1)}(x_0)$

$y_2(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_2^{(n_2-1)}(x_0)$

.....

$y_m(x_0), y_m'(x_0), \dots, y_m^{(n_m-1)}(x_0)$

の値を指定する。

このような付帯条件を 初期条件 (Cauchy 条件) という。

また、異なる 2 点 $x = x_1$ と $x = x_2$ において、未知関数の値や導関数の値を指定するような条件を 境界条件 という。一般に、解を一つに定めるためには任意定数の個数だけ条件を与える必要がある。

例 1 の解法

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -g \text{ より, } \frac{dx}{dt} = \int (-g) dt + C_1 = -gt + C_1 \text{ となり, さらに,}$$

$$x = \int (-gt + C_1) dt + C_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \text{ となる. これが一般解であり}$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + 2t \text{ などは特殊解である. この方程式には特異解はない.}$$

微分方程式を解く方法については、

- ・積分を用いて解く方法 (求積法による解法)
- ・無限級数を用いて解く方法
- ・数値計算で近似解を求める方法
- ・積分方程式に帰着して逐次近似で近似解を求める方法

などがある。また、求積法を用いて解を具体的に書き下すことのできる微分方程式はそれ

ほど多くない．解を書き下すことはしないで，解のさまざまな性質について調べることもある．

参考書

微分積分学の教科書

- [1] 栗田 稔『基礎教養 微分積分学(新訂版)』学術図書出版社 1,600 円
- [2] 越 昭三監修 高橋泰嗣・加藤幹雄『微分積分概論』サイエンス社 1,700 円
- [3] 堀内 龍太郎・川崎 廣吉・浦部 治一郎『理工系基礎 微分積分学』培風館 1,900 円

微分方程式の本

- [4] 古屋 茂『新版 微分方程式入門』サイエンス社 1,400 円
- [5] 吉田 耕作『微分方程式の解法 第2版』岩波全書 (絶版)
- [6] 楠 幸男『応用常微分方程式』朝倉書店 基礎工業数学講座 7(絶版)
- [7] ポントリャーギン『常微分方程式(新版)』(日本語訳) 共立出版 3,800 円
- [8] M. ブラウン『微分方程式 —その数学と応用—』(上下2巻)
(日本語訳) シュプリンガー・フェアラーク東京 各 3,800 円
- [9] R. ハーバーマン『生態系の微分方程式』(日本語訳) 現代数学社 2,700 円
- [10] 吉沢 太郎『微分方程式入門』朝倉書店
- [11] 小山 昭雄『経済数学教室 7 ダイナミックシステム上』岩波書店 3,800 円

§ 1 一階の単独微分方程式 (求積法による微分方程式の解法)

ここでは，一階の単独微分方程式

$$(1-1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

または

$$(1-2) \quad F(x, y, y') = 0$$

について求積法による解法を述べる．求積法によって解くことのできる微分方程式は次のようなものがある．

- ・変数分離型微分方程式
- ・同次形微分方程式
- ・線型微分方程式
- ・ベルヌーイ (Bernoulli) の微分方程式
- ・完全微分方程式
- ・積分因子を用いて完全微分方程式に帰着する方法
- ・リッカチ (Riccati) の微分方程式
- ・クレロー (Clairaut) の微分方程式とダランベール (d'Alembert) の微分方程式

以下にこれらの方程式の求積法による解法を述べる．

1.1 変数分離型微分方程式

$$(1-3) \quad \frac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$$

のように，(1-1) の右辺の式が x だけの関数と y だけの関数の積の形に書けている微分方程式を 変数分離型 であるという．

(1-3) の両辺を $Q(y)$ で割って， x で積分すれば，置換積分の公式より

$$\int \frac{1}{Q(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{Q(y)} dy = \int P(x) dx + C$$

これを，次のように書けばよい．

y に関係したものを左辺に， x に関係したものを右辺にまわして，積分する．

$$\frac{1}{Q(y)} dy = P(x) dx \quad , \quad \int \frac{1}{Q(y)} dy = \int P(x) dx + C$$

$y = f(x)$ のように陽関数の形に書けなくて, $g(x, y) = 0$ のように陰関数の形にしか書けない場合もある.

例題 1

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C, \quad -\frac{1}{y} = x + C, \quad y = -\frac{1}{x + C}$$

例題 2

$$\frac{dy}{dx} = 2axy$$

$$\frac{dy}{y} = 2ax dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2ax dx + c, \quad \log |y| = ax^2 + c$$

$$y = \pm e^{ax^2+c} = \pm e^c e^{ax^2}$$

ここで, $C = \pm e^c$ とおけば, 一般解は $y = Ce^{ax^2}$ と書ける.

例題 3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} + c, \quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$$

両辺の tangent をとれば, $y = \tan(\tan^{-1} x + c) = \frac{x + \tan c}{1 - x \tan c}$

ここで, $C = \tan c$ とおけば, 一般解は $y = \frac{x + C}{1 - Cx}$ と書ける.

問題 I - 1 - 1 次の変数分離型微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad 2x \frac{dy}{dx} = y$$

$$(2) \quad x(1+x)y' = 1$$

$$(3) \quad x \frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = (y^2 - 1) \tan x$$

$$(5) \quad e^{2x-y} + e^{x+y}y' = 0$$

問題 I - 1 - 2 $y^2 + (1+x)y' = 0$ の一般解と $x = 0$ のとき $y = 1$ となる解を求めよ .

問題 I - 1 - 3 前節の例の中で変数分離型である微分方程式はどれか? それらの一般解を求めよ .

1.2 同次形微分方程式

$$(1-4) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

これは方程式 (1-1) の右辺 $f(x, y)$ が x, y の 0 次同次関数となっている場合である¹

同次形の微分方程式は次のような未知関数の変換によって変数分離型微分方程式に帰着できる .

$$\frac{y}{x} = u, \text{ すなわち } y = xu \text{ とおく .}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \text{ より , } \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad (\text{変数分離型})$$

$$\int \frac{dy}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

例題 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}, \quad \text{ここで } y = xu \text{ とおくと , } u + x \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u}, \quad \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\tan^{-1} u - \frac{1}{2} \log(1+u^2) = \log|x| + c, \quad \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \log|x| + c$$

$$2 \tan^{-1} \frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2) + c$$

¹関数 $f(x, y)$ が α 次同次関数であるとは, 任意の x, y, λ に対して $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$ が成り立つことをいう .

問題 I - 1 - 4 次の同次形微分方程式の一般解を求めよ .

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} & (2) \quad xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \\
 (3) \quad x^3 - 2xy^2 + 3x^2yy' = 0 & (4) \quad xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2} \\
 (5) \quad x \cos \frac{y}{x} + xy' - y = 0 &
 \end{array}$$

1.3 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ の形の方程式

$$(1-5) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

この形の方程式は独立変数や未知関数の変換によって同次形方程式や変数分離型方程式に変形できる .

(1) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ のとき

x, y を未知数とする次の連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

は唯一つの解 $x = x_0, y = y_0$ を持つ . そこで

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

と変換すると

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dX} \\
 \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = a_1X + b_1Y + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = a_1X + b_1Y \\ a_2x + b_2y + c_2 = a_2X + b_2Y + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = a_2X + b_2Y \end{cases}
 \end{aligned}$$

となるので , 同次形方程式

$$(1-6) \quad \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right)$$

に帰着できた .

(2) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ のとき

$a_2 = b_2 = 0$ ならば (このときは $c_2 \neq 0$ である), $u = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{c_2}$ において未知関数の変換の変換をすれば, 方程式は

$$(1-7) \quad \frac{du}{dx} = \frac{a_1 + b_1f(u)}{c_2}$$

となり変数分離型方程式に帰着できた.

また, $|a_2| + |b_2| \neq 0$ のときは, $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$ と書けるので, $u = a_2x + b_2y + c_2$ において未知関数の変換の変換をすれば,

$$(1-8) \quad \frac{du}{dx} = a_2 + b_2f\left(\frac{k(u - c_2) + c_1}{u}\right)$$

となり変数分離型方程式に帰着できた.

例題 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x + y - 2}{x - 3y - 4}$$

連立方程式

$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

は解 $x = 1, y = -1$ をもつ. そこで $x = X + 1, y = Y - 1$ とおけば,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X + Y}{X - 3Y} \quad (\text{同次形})$$

$\frac{Y}{X} = u$ ($Y = Xu$) とおけば, $\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$, $\frac{3X + Y}{X - 3Y} = \frac{3 + u}{1 - 3u}$ より,

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{3 + u}{1 - 3u}, \quad X \frac{du}{dX} = \frac{3 + u}{1 - 3u} - u = \frac{3 + 3u^2}{1 - 3u}$$

$$\int \frac{1 - 3u}{1 + u^2} du = \int \frac{3dX}{X}, \quad \tan^{-1} u - \frac{3}{2} \log(1 + u^2) = 3 \log |X| + C$$

$$\tan^{-1} \frac{Y}{X} - \frac{3}{2} \left(\log(1 + \frac{Y^2}{X^2}) + 2 \log |X| \right) = C, \quad \tan^{-1} \frac{Y}{X} - \frac{3}{2} \log(X^2 + Y^2) = C$$

よって, 一般解は

$$\tan^{-1} \frac{y + 1}{x - 1} - \frac{3}{2} \log \{(x - 1)^2 + (y + 1)^2\} = C$$

例題 6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$$

$$2x - 2y + 5 = u \text{ とおくと, } x - y + 3 = \frac{1}{2}(u - 5) + 3 = \frac{1}{2}(u + 1)$$

$$\text{また, } \frac{du}{dx} = 2 - 2\frac{dy}{dx} = 2 - 2\frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5} = 2 - 2\frac{\frac{1}{2}(u + 1)}{u} = \frac{u - 1}{u}$$

すなわち, 変数分離型微分方程式 $\frac{du}{dx} = \frac{u - 1}{u}$ に帰着できた.

$$\int \frac{u}{u - 1} du = \int \left(1 + \frac{1}{u - 1}\right) du = \int dx, \quad$$

$$u + \log|u - 1| = x + c, \quad 2x - 2y + 5 + \log|2x - 2y + 5| = x + c$$

$x - 2y + \log|x - y + 2| = c - 5 - \log 2$, ここで, $c - 5 - \log 2 = C$ とおけば, 一般解は

$$x - 2y + \log|x - y + 2| = C$$

と書ける.

例題 7

$$\frac{dy}{dx} = (x - y + 3)^2$$

$$x - y + 3 = u \text{ とおくと, } \frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} = 1 - (x - y + 3)^2 = 1 - u^2 \quad (\text{変数分離型})$$

$$\int \frac{1}{u^2 - 1} du = -\int dx$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} \right) du = -x + c, \quad \frac{1}{2} \log \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| = -x + c$$

$$\log \left| \frac{x - y + 2}{x - y + 4} \right| = -2x + 2c, \quad \frac{x - y + 2}{x - y + 4} = \pm e^{2c} e^{-2x}$$

ここで, $\pm e^{2c} = \frac{1}{C}$ とおけば, $Ce^{2x}(x - y + 2) = x - y + 4$ となり, 一般解は

$$y = \frac{x + 4 - C(x + 2)e^{2x}}{1 - Ce^{2x}} \quad \text{と書ける.}$$

問題 I - 1 - 5 次の微分方程式の一般解を求めよ .

$$\begin{array}{ll} (1) \quad (4x + 3y - 7) \frac{dy}{dx} = 3x - 4y + 1 & (2) \quad y' = \frac{x + 2y + 6}{2x + y + 6} \\ (3) \quad y' = \frac{x - y - 1}{x - y - 5} & (4) \quad \frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2 \end{array}$$

1.4 線型方程式

未知関数とその導関数に関して一次式で書けている方程式

$$a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0$$

を 線型微分方程式 という . これを次のような形で扱おう .

$$(1 - 9) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

まず , $f(x) \equiv 0$ のときは変数分離型方程式

$$(1 - 10) \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

を考える . すると ,

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx \quad , \quad \log |y| = - \int p(x) dx + c \quad , \quad y = \pm e^c e^{- \int p(x) dx}$$

ここで , $\pm e^c = C$ とおくと , (1 - 10) の一般解は $y = C e^{- \int p(x) dx}$ と書ける . (1 - 9) の方程式の解を求めるために , 定数 C を x の関数 $C(x)$ として ,

$$(1 - 11) \quad y = C(x) e^{- \int p(x) dx}$$

が方程式 (1 - 9) を満たすように関数 $C(x)$ を見つけよう (定数変化法)

(1 - 11) を方程式 (1 - 9) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dC(x)}{dx} e^{- \int p(x) dx} - C(x)p(x)e^{- \int p(x) dx} + p(x)C(x)e^{- \int p(x) dx} &= f(x) \\ \frac{dC(x)}{dx} e^{- \int p(x) dx} &= f(x) \quad , \quad \frac{dC(x)}{dx} = e^{\int p(x) dx} f(x) \end{aligned}$$

よって , $C(x)$ は

$$C(x) = \int e^{\int p(x) dx} f(x) dx + C$$

と書け，方程式 (1 - 9) の一般解は

$$(1 - 12) \quad y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int e^{\int p(x) dx} f(x) dx + C \right)$$

と書ける．

実質的には今まで説明してきた定数変化法と同じであるが，次のような考え方もある．

$p(x)$ の一つの原始関数を $P(x)$ とし， $e^{P(x)}$ を方程式 (1 - 9) の両辺に掛ける．

$$e^{P(x)} \frac{dy}{dx} + e^{P(x)} p(x) y = e^{P(x)} f(x)$$

するとこの左辺は， $\frac{d}{dx} (ye^{P(x)})$ となっているので，

$$\frac{d}{dx} (ye^{P(x)}) = e^{P(x)} f(x)$$

よって，

$$ye^{P(x)} = \int e^{P(x)} f(x) dx + C$$

一般解は

$$(1 - 13) \quad y = e^{-P(x)} \left(\int e^{P(x)} f(x) dx + C \right)$$

例題 8

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^2$$

右辺を 0 とおいた方程式 $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ を考えよう．

この方程式は変数分離型であるので， $\int \frac{dy}{y} = -\int x dx$ ， $\log |y| = -\frac{1}{2}x^2 + c$

$y = \pm e^c e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ，ここで， $\pm e^c = C$ とおけば， $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

C を x の関数として， $y = C(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ を元の方程式 $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$ に代入すると，

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\frac{1}{2}x^2} - C(x) x e^{-\frac{1}{2}x^2} + x C(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} = x^2 \quad , \quad \frac{dC(x)}{dx} = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$C(x) = \int x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C$ ，よって一般解は

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C \right)$$

$$\int x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} dx = \int x \left(e^{\frac{1}{2}x^2} \right)' dx = x e^{\frac{1}{2}x^2} - \int e^{\frac{1}{2}x^2} dx \text{ より}$$

$$y = x - e^{-\frac{1}{2}x^2} \int e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

問題 I - 1 - 6 次の線型微分方程式の一般解を求めよ .

$$(1) \quad xy' - 2y = x^4 \qquad (2) \quad y' + y \tan x = \sin 2x$$

$$(3) \quad x \frac{dy}{dx} + (1-x)y = x^2 e^x \qquad (4) \quad (1-x^2)y' + xy = 2x$$

問題 I - 1 - 7 次の初期値問題を解け .

$$(1) \quad y' + 3y = e^x, \quad y(0) = 1$$

$$(2) \quad y' + x^2 y = \sin x, \quad y(0) = 0$$

$$(3) \quad xy' - 3y = 2x, \quad y(1) = 0$$

1.5 ベルヌーイ (Bernoulli) の微分方程式

次の形の微分方程式を ベルヌーイ (Bernoulli) の微分方程式 という .

$$(1-14) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$$

ここで , $n = 1$ のときは変数分離型 , $n = 0$ のときは線型微分方程式となるので , $n \neq 0, n \neq 1$ とする . 未知関数を $z = y^{1-n}$ と変換する . すると ,

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n} (f(x)y^n - p(x)y) = (1-n)(f(x) - p(x)y^{1-n})$$

$y^{1-n} = z$ となるので , z についての線型微分方程式

$$(1-15) \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)$$

に帰着された .

例題 9

$$\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^3$$

$$z = y^{-2} \text{ とおくと,}$$

$$\frac{dz}{dx} = -2xz - 2x^2 \text{ (線型微分方程式)}$$

となり, (1-13) より

$$z = y^{-2} = e^{-x^2} \left(-\int 2x^2 e^{x^2} dx + C \right) = e^{-x^2} \left(-\int x (e^{x^2})' dx + C \right)$$

$$= e^{-x^2} \left(-xe^{x^2} + \int e^{x^2} dx + C \right)$$

$$z = y^{-2} = e^{-x^2} \left(-\int 2x^2 e^{x^2} dx + C \right) = e^{-x^2} \left(-\int x (e^{x^2})' dx + C \right)$$

$$y^2 = \frac{e^{x^2}}{-xe^{x^2} + \int e^{x^2} dx + C}$$

問題 I - 1-8 次のベルヌーイ (Bernoulli) の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad 3y' + xy = \frac{x}{y^2}$$

$$(2) \quad x^2y' - xy = y^2$$

$$(3) \quad x^3y' = x^2y - y^4 \cos x$$

1.6 リッカチ (Riccati) の微分方程式

$\frac{dy}{dx}$ が y について 2 次式となっている微分方程式を Riccati の微分方程式

という.

$$(1-16) \quad \frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

Riccati の微分方程式は一般には解けないが, 一つの特解がわかっているときには一般解を求めることができる.

いま, $\varphi(x)$ が一つの特解になっているとしよう. $y = u + \varphi(x)$ において未知関数の変換をしよう. すると,

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - \varphi'(x) = p(x) + q(x)(u + \varphi(x)) + r(x)(u + \varphi(x))^2 - \varphi'(x)$$

$$\frac{du}{dx} = (q(x) + 2r(x)\varphi(x))u + r(x)u^2 + p(x) + q(x)\varphi(x) + r(x)(\varphi(x))^2 - \varphi'(x)$$

ここで, $\varphi'(x) = p(x) + q(x)\varphi(x) + r(x)(\varphi(x))^2$ より, u についての Bernoulli の微分方程式 ($n = 2$)

$$(1-17) \quad \frac{du}{dx} - (q(x) + 2r(x)\varphi(x))u = r(x)u^2$$

に帰着され, ここで求めた一般解を $y = u + \varphi(x)$ に代入すれば元の方程式の一般解が得られる.

例題 10

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} + y^2$$

これは特殊解 $y = \frac{1}{x}$ を持つので, $y = u + \frac{1}{x}$ とおくと,

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2} + (u + \frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x}u + u^2 \quad (\text{Bernoulli の微分方程式})$$

となる. さらに $z = u^{-1} = \frac{1}{u}$ とおけば,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{x}u + u^2 \right) = -\frac{2}{x}z - 1$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = -1$$

$\int \frac{2dx}{x} = 2\log x$ より, $e^{2\log x} = x^2$ を両辺にかければ,

$$x^2 \frac{dz}{dx} + 2xz = \frac{d}{dx} (x^2 z) = -x^2, \quad x^2 z = -\int x^2 dx = -\frac{1}{3}x^3 + C$$

$$z = -\frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2} = \frac{3C - x^3}{3x^2}, \quad u = \frac{1}{z} = \frac{3x^2}{3C - x^3}$$

よって元の方程式の一般解は

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3C - x^3} = \frac{3C + 2x^3}{x(3C - x^3)}$$

となる.

問題 I - 1 - 9 Riccati の微分方程式 $y' = (1 + x) + (2x - 1)y - 2y^2$ が特殊解 $y = x$ を持つことを用いて，一般解を求めよ．

問題 I - 1 - 10 Riccati の微分方程式 $y' = y^2 + \frac{k}{x^2}$ が $y = ax^\lambda$ という形の特殊解を持つことを用いて，一般解を求めよ．

1.7 完全微分方程式

微分方程式

$$(1 - 18) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

を次のように変形する．

$$(1 - 19) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

方程式 (1 - 19) の左辺の 1 次微分形式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ がある関数 $F(x, y)$ の全微分となっているとき，すなわち

$$(1 - 20) \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

を満たすとき，この方程式 (1 - 19) を 完全微分方程式 という．

方程式 (1 - 19) が完全微分方程式であれば，一般解

$$(1 - 21) \quad F(x, y) = C$$

を持つ．

定理 I - 1 - 1 方程式 (1 - 19) が完全微分方程式であるための必要十分条件は

$$(1 - 22) \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

が成り立つことである．

[証明] 完全微分方程式であれば $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$ となり, 必要性が証明された.

十分性は

$$(1-23) \quad F(x, y) = \int_a^x P(t, b) dt + \int_b^y Q(x, t) dt$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= P(x, b) + \int_b^y \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dt \\ &= P(x, b) + \int_b^y \frac{\partial P(x, t)}{\partial y} dt \\ &= P(x, b) + P(x, y) - P(x, b) \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

が成り立つ. よって, 関数 $F(x, y)$ が 1 次微分形式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ の全微分となり, 方程式 (1-19) が完全微分方程式であることが示された. [証明終]

注意 1 (1-23) の右辺の積分の定数 a, b は, 点 (a, b) が領域内にあれば何をとってもよい.

注意 2 (1-23) は上の図において, 線積分を用いて,

$$F(x, y) = \int_{C_1} (Pdx + Qdy) + \int_{C_2} (Pdx + Qdy)$$

と書ける.

注意 3 考えている領域が単連結であれば, 線積分は点 A から点 B まで経路はどのようなにとっても変わらない.

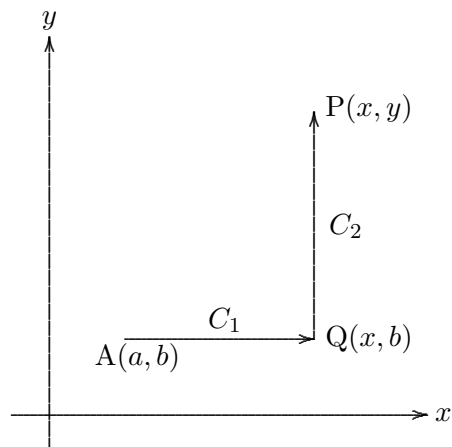
問題 I - 1 - 11 次の微分方程式が完全微分方程式であることを確かめ, 一般解を求めよ.

$$(1) (2x - y + 1)dx - (x - 2y + 1)dy = 0$$

$$(2) (x^2 + 2xy + y)dx + (y^3 + x^2 + x)dy = 0$$

$$(3) e^y dx + xe^y dy = 0$$

$$(4) (x - y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0$$



問題 I - 1 - 12 () 内の初期条件を満たす解を求めよ .

$$(1) (x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0 \quad (y(1) = 1)$$

$$(2) \frac{\tan y}{\cos^2 x} dx + \frac{\tan x}{\cos^2 y} dy = 0 \quad (y(1) = 2)$$

1.8 積分因子

$$(1 - 24) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

が完全微分方程式でない場合に , ある関数 $\lambda(x, y)$ をこの両辺にかければ , それが完全微分方程式にできることがある . このようなとき , 関数 $\lambda(x, y)$ を 積分因子 という . 積分因子が求まれば , 方程式 (1 - 24) は完全微分方程式に帰着され , 一般解を求めることができる .

例題 11

$$ydx - xdy = 0$$

$$\text{両辺を } xy \text{ で割れば , } \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d(\log|x| - \log|y|) \text{ より , 一般解は}$$

$$\log\left|\frac{x}{y}\right| = c \quad , \quad \frac{x}{y} = \pm e^c \quad , \quad \pm e^c = \frac{1}{C} \text{ とおき直せば , } y = Cx$$

さて , $\lambda(x, y)$ が積分因子となるための条件を調べよう . その条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q)$$

であり , 整理すると ,

$$(1 - 25) \quad P \frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \lambda$$

となる . これは λ に関する 1 階の偏微分方程式であり , 通常 , 解は存在するが , 一般には具体的にそれを求めることは困難である . 特別な場合にそれを求めてみよう .

λ が x だけの関数の場合や y だけ関数の場合を考えよう . x だけの関数の場合

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{Q_x - P_y}{Q}\lambda$$

となり, $\frac{Q_x - P_y}{Q}$ が x だけの関数であれば, 積分因子は $\lambda(x) = \exp(-\int \frac{Q_x - P_y}{Q} dx)$ として求まる.

同様に $\frac{Q_x - P_y}{P}$ が y だけの関数であれば, 積分因子は $\lambda(y) = \exp(\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy)$ として求まる.

以上を定理としてまとめよう.

定理 I - 1 - 2

(1) $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ が x のみの関数であれば, $\lambda(x) = \exp(\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx)$ が積分因子である.

(2) $\frac{Q_x - P_y}{P}$ が y のみの関数であれば, $\lambda(y) = \exp(\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy)$ が積分因子である.

問題 I - 1 - 13 次の微分方程式の積分因子を見つけ出し, 一般解を求めよ.

(1) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

(2) $ydx - (2x + y^4)dy = 0$

(3) $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3dy = 0$

問題 I - 1 - 14 方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ の積分因子 λ が $x + y$ だけの関数であるための P, Q に関する条件を見つけよ. またそのときの積分因子はどのようなになるか.

問題 I - 1 - 15 線型微分方程式方程式 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ を変形して得られる方程式

$$(p(x)y - f(x))dx + dy = 0$$

の積分因子を求めよ.

1.9 クレロー (Clairaut) の微分方程式

正規形には書かれていない微分方程式

$$(1 - 26) \quad y = xy' + g(y')$$

を クレローの微分方程式 という． $y' = p$ とおいて，

$$(1-27) \quad y = px + g(p) \quad \left(\frac{dy}{dx} = p\right)$$

と書く．この両辺を x で微分すると，

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

$$0 = \frac{dp}{dx} (x + g'(p))$$

これより， $\frac{dp}{dx} = 0$ かまたは， $x = -g'(p)$ となる．

$\frac{dp}{dx} = 0$ のときは

$$p = \frac{dy}{dx} = C$$

これを (1-27) に代入して，

$$(1-28) \quad y = Cx + g(C)$$

これは明らかに方程式 (1-26) を満たすので，方程式 (1-26) の一般解となる．一般解は直線の族になっている．

また， $x = -g'(p)$ のときは (1-27) に代入して， $y = g(p) - pg'(p)$ ，すなわち

$$\begin{cases} x = -g'(p) \\ y = g(p) - pg'(p) \end{cases}$$

ここで， p を媒介変数とみなして， p の代わりに C を用いると，

$$(1-29) \quad \begin{cases} x = -g'(C) \\ y = g(C) - Cg'(C) \end{cases}$$

これもまた方程式 (1-26) の解になっている．実際 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dC}}{\frac{dx}{dC}} = \frac{-Cg''(C)}{-g''(C)} = C$ と

なっているので， $y = x \frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ を満たしている．

この解 (1-29) は特異解であり，一般解 (1-28) の包絡線もしくは特異点の軌跡となっている．しかし，曲線 (1-28) には特異点がないため包絡線となっている．

例題 12

$$y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

これはクレローの微分方程式となっており, $C = \frac{dy}{dx}$ とおいて, 一般解は

$$y = Cx + C^2$$

であり, その両辺を C で偏微分して, $0 = x + 2C$, これらより,

$$y = \left(-\frac{x}{2} \right) x + \left(-\frac{x}{2} \right)^2 = -\frac{x^2}{4}$$

は方程式の特異解であり, 一般解の包絡線になっている.

問題 I - 1 - 16 次の微分方程式の一般解と特異解を求めよ.

$$(1) \quad y = xy' + y' - y'^2$$

$$(2) \quad y = xy' + \frac{1}{y'}$$

$$(3) \quad y = xy' + \sqrt{-y'}$$

1.10 ダランベール (d'Alembert) の微分方程式

クレローの微分方程式をもう少し一般的にした次の方程式を考えよう.

$$(1 - 30) \quad y = xf(y') + g(y')$$

この形の微分方程式を ダランベールの微分方程式 という. クレローの微分方程式の場合と同様に $p = y'$ とおくと,

$$(1 - 31) \quad y = xf(p) + g(p)$$

この両辺を x で微分する.

$$p = f(p) + xf'(p) \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = (xf'(p) + g'(p)) \frac{dp}{dx}$$

$$(p - f(p)) \frac{dx}{dp} = xf'(p) + g'(p)$$

ここで, $p \neq f(p)$ とすれば,

$$(1-32) \quad \frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p-f(p)}x = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$$

を得る. この方程式において, x と p の立場を入れ替えて考えてみよう. すなわち, p を独立変数とし, x を未知関数と考える. するとこれは線型の微分方程式である. よって, これは求積法で解ける, その一般解を $x = \varphi(p, C)$ とし, これを (1-31) に代入すると,

$$(1-33) \quad \begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = \varphi(p, C)f(p) + g(p) \end{cases}$$

を得て, これが p を para-meter とみなした関数と見れば, 方程式 (1-30) の一般解となっている. 実際

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{\varphi'(p, C)f(p) + \varphi(p, C)f'(p) + g'(p)}{\varphi'(p, C)} \\ &= \frac{\frac{f'(p)\varphi(p, C) + g'(p)}{p-f(p)}f(p) + \varphi(p, C)f'(p) + g'(p)}{\frac{f'(p)\varphi(p, C) + g'(p)}{p-f(p)}} = p \end{aligned}$$

が得られ, 方程式を満たすことがわかる.

また, $f(p) = p$ となる p_0 があれば, $y = p_0x + g(p_0)$ が解であることがわかる. これは特異解となっている.

問題 I - 1 - 17 次の微分方程式の一般解と特異解を求めよ.

$$(1) \quad y = x(1 + y'^2) + y'$$

$$(2) \quad y = 2xy' - y'^2$$

§ 2 高階の単独線型微分方程式と 1 階線型連立微分方程式

これまでは、独立変数を x で表わしてきたが、この節では独立変数を t で表わすことにしよう。理由は独立変数が時刻である場合が多いことによる。さらに、独立変数 t は実数の値しか考えないが、登場する関数は複素数の値をとるものとしよう。

次のような単独の（未知関数が 1 個の）高階線型微分方程式

$$(2-1) \quad \frac{d^m u(t)}{dt^m} + a_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{du(t)}{dt} + a_0(t) u(t) = f(t)$$

あるいは未知関数が複数個の 1 階の線型連立微分方程式

$$(2-2) \quad \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + A(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$$

$$\left(\text{ここで, } \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u^{(1)}(t) \\ u^{(2)}(t) \\ \vdots \\ u^{(m)}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f^{(1)}(t) \\ f^{(2)}(t) \\ \vdots \\ f^{(m)}(t) \end{bmatrix}, A(t) \text{ は } m \text{ 次正方行列である。} \right)$$

について考える。

2.1 連立一階線型微分方程式の一般的な性質

1 階の線型連立微分方程式 (2-2) について考えていこう。そのあとで、単独の高階線型微分方程式 (2-1) について述べる。

まず、方程式の右辺 $\mathbf{f}(t)$ が 0 の場合の方程式 (同次方程式)

$$(2-3) \quad \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} + A(t)\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$$

を考える。すると以下の定理が成り立つ。

定理 I - 2 - 1 (解空間の線型性)

$\mathbf{v}_1(t)$ と $\mathbf{v}_2(t)$ を方程式 (2-3) の 2 つの解とすると $c_1 \mathbf{v}_1(t) + c_2 \mathbf{v}_2(t)$ もまた、方程式 (2-3) の解である。ただし、 c_1 と c_2 は定数とする。

証明は容易なので省略する。

問題 I - 2 - 1 上の定理を証明せよ。

さらに、次の定理が成り立つ。

定理 I - 2 - 2

$u_0(t)$ を方程式 (2 - 2) の 1 つの解とすると、(2 - 2) の他の解 $u(t)$ は方程式 (2 - 3) の解 $v(t)$ があって、 $u(t) = v(t) + u_0(t)$ と書ける。すなわち、 $v(t) = u(t) - u_0(t)$ は方程式 (2 - 3) の解になっている。

これも証明は容易なので省略する。

問題 I - 2 - 2 上の定理を証明せよ。

方程式 (2 - 3) の m 個の解 $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)\}$ があって、

$$(2-4) \quad V(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)] = \begin{bmatrix} v_1^{(1)}(t) & v_2^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & v_2^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & v_2^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{bmatrix}$$

とおく。今、 $V(t)$ の行列式 $\det V(t) = \begin{vmatrix} v_1^{(1)}(t) & v_2^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & v_2^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & v_2^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$ であるとき、

すなわち $V(t)$ が逆行列 $V(t)^{-1}$ を持つとき、方程式 (2 - 2) に左から $V(t)^{-1}$ をかけると、

$$(2-5) \quad V(t)^{-1} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + V(t)^{-1} A(t) \mathbf{u}(t) = V(t)^{-1} \mathbf{f}(t)$$

また、

$$(2-6) \quad \frac{d}{dt} \{V(t)^{-1} \mathbf{u}(t)\} = \frac{dV(t)^{-1}}{dt} \mathbf{u}(t) + V(t)^{-1} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$$

であり、

$$(2-7) \quad \frac{dV(t)^{-1}}{dt} = -V(t)^{-1} \frac{dV(t)}{dt} V(t)^{-1}$$

$$(2-8) \quad \frac{dV(t)}{dt} = -A(t)V(t)$$

より、

$$(2-9) \quad \frac{dV(t)^{-1}}{dt} = -V(t)^{-1} (-A(t)V(t)) V(t)^{-1} = V(t)^{-1} A(t)$$

を得て，これを (2 - 6) に代入すると，

$$(2 - 10) \quad \frac{d}{dt} \{V(t)^{-1} \mathbf{u}(t)\} = V(t)^{-1} A(t) \mathbf{u}(t) + V(t)^{-1} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$$

となって，これはちょうど (2 - 5) の左辺となっているので，

$$(2 - 11) \quad \frac{d}{dt} \{V(t)^{-1} \mathbf{u}(t)\} = V(t)^{-1} \mathbf{f}(t)$$

これから，

$$(2 - 12) \quad V(t)^{-1} \mathbf{u}(t) = \int V(t)^{-1} \mathbf{f}(t) dt + \mathbf{c}$$

$$(2 - 13) \quad \mathbf{u}(t) = V(t) \int V(t)^{-1} \mathbf{f}(t) dt + V(t) \mathbf{c}$$

を得る．ここで $\mathbf{c}$ は m 次元の定数縦ベクトルであり，(2 - 13) が方程式 (2 - 2) の一般解となる．以上をまとめれば次の定理となる．

定理 I - 2 - 3 同次方程式 (2 - 3) の m 個の解 $\{\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)\}$ があって，これらを列ベクトルとする行列 $V(t) = [\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)]$ が正則であれば，方程式 (2 - 2) の一般解は (2 - 13) の形に書ける．

一般に，同次方程式 (2 - 3) の m 個の解 $\{\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)\}$ について，これらが一次独立であるとき，これら m 個の解を方程式 (2 - 3) の 解の基本系 (fundamental system of solutions) という．

また，同次方程式 (2 - 3) の m 個の解 $\{\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)\}$ を列ベクトルとする行列 $V(t) = [\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)]$ の行列式 $W(t) = \det V(t)$ を方程式 (2 - 3) の Wronski の行列式 (Wronskian) という．

すると，同次方程式 (2 - 3) の m 個の解 $\{\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)\}$ について次の 3 つの条件は同値である．

- (1) 解の基本系になっている．
- (2) 行列 $V(t) = [\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_m(t)]$ が正則である．
- (3) Wronskian $W(t) = \det V(t)$ は 0 にはならない．

定理 I - 2 - 4

$$(2 - 14) \quad \frac{dW(t)}{dt} + (\text{tr} A(t)) W(t) = 0$$

ここで， $\text{tr} A(t)$ は正方行列の対角成分の和 $\text{tr} A(t) = \sum_{i=1}^m a_{ii}(t)$ を表わす．

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} = & \begin{vmatrix} \frac{dv_1^{(1)}(t)}{dt} & \frac{dv_2^{(1)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dv_m^{(1)}(t)}{dt} \\ v_1^{(2)}(t) & v_2^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & v_2^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{v_1^{(1)}(t)}{dt} & \frac{v_2^{(1)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{v_m^{(1)}(t)}{dt} \\ \frac{dv_1^{(2)}(t)}{dt} & \frac{dv_2^{(2)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dv_m^{(2)}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & v_2^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} + \\ & \cdots + \begin{vmatrix} v_1^{(1)}(t) & v_2^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & v_2^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dv_1^{(m)}(t)}{dt} & \frac{dv_2^{(m)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dv_m^{(m)}(t)}{dt} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ここで右辺の各項は

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} v_1^{(1)}(t) & v_2^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & v_2^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dv_1^{(k)}(t)}{dt} & \frac{dv_2^{(k)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dv_m^{(k)}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & v_2^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v_1^{(1)}(t) & v_2^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & v_2^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^m a_{kj}(t)v_1^{(j)}(t) & -\sum_{j=1}^m a_{kj}(t)v_2^{(j)}(t) & \cdots & -\sum_{j=1}^m a_{kj}(t)v_m^{(j)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & v_2^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ここで 第 j 行の $a_{kj}(t)$ 倍を第 k 行に加えれば,

$$\begin{vmatrix} v_1^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dv_1^{(k)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dv_m^{(k)}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1^{(1)}(t) & \cdots & v_m^{(1)}(t) \\ v_1^{(2)}(t) & \cdots & v_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{kk}(t)v_1^{(k)}(t) & \cdots & -a_{kk}(t)v_m^{(k)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(m)}(t) & \cdots & v_m^{(m)}(t) \end{vmatrix} = -a_{kk}(t)W(t)$$

となり,

$$\begin{aligned}\frac{dW(t)}{dt} &= -a_{11}(t)W(t) - a_{22}(t)W(t) - \cdots - a_{mm}(t)W(t) \\ &= -(\operatorname{tr} A(t))W(t)\end{aligned}$$

が得られる．

[証明終]

この定理を用いれば，次のことがわかる．

定理 I - 2 - 5 t がある区間に属しているとき，Wronskian はこの区間で，恒等的に 0 であるか，決して 0 にならないかのいずれか一方のみ成り立つ．よって， $V(t)$ はこの区間のある点で正則であれば，この区間のすべての点で正則となる．

[証明] 前節の求積法による線型方程式の解法と同様の議論をする．

$\operatorname{tr} A(t)$ の一つの原始関数を $P(t)$ とし，方程式 (2 - 14) の両辺に $e^{P(t)}$ をかけると， $\frac{d}{dt}(e^{P(t)}W(t)) = 0$ となり， $e^{P(t)}W(t)$ は定数 C でなければならない．よって， $W(t) = Ce^{-P(t)}$ となり， $W(t)$ は恒等的に 0 であるか決して 0 にならないかどちらかである．

[証明終]

2.2 単独高階線型微分方程式の一般的な性質

さて，今度は単独の方程式 (2 - 1) について調べてみよう．方程式 (2 - 1) の右辺の $f(t)$ が 0 の場合の方程式（同次方程式）

$$(2 - 15) \quad \frac{d^m v(t)}{dt^m} + a_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} v(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dv(t)}{dt} + a_0(t)v(t) = 0$$

を考える．すると以下の定理が成り立つ（証明は一階の連立線型方程式と同様なので省略する）

定理 I - 2 - 6（解空間の線型性）

$v_1(t)$ と $v_2(t)$ を方程式 (2 - 15) の 2 つの解とすると $c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)$ もまた，方程式 (2 - 15) の解である．ただし， c_1 と c_2 は定数とする．

定理 I - 2 - 7

$u_0(t)$ を方程式 (2 - 1) の 1 つの解とすると，(2 - 1) の他の解 $u(t)$ は方程式 (2 - 15) の解 $v(t)$ があって， $u(t) = v(t) + u_0(t)$ と書ける．すなわち， $v(t) = u(t) - u_0(t)$ は方程式 (2 - 15) の解になっている．

方程式 (2 - 1) と方程式 (2 - 15) をつぎのような変換によって, 一階の連立線型微分方程式に帰着させよう.

$$(2-16) \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \frac{du(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} \end{bmatrix}$$

とおけば, 方程式 (2 - 1) は

$$(2-17) \quad \begin{bmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{d^2u(t)}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^m u(t)}{dt^m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0(t) & a_2(t) & \cdots & a_{m-2}(t) & a_{m-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \frac{du(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

と書ける. 以上より,

$$(2-18) \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0(t) & a_2(t) & \cdots & a_{m-2}(t) & a_{m-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

とおけば, 方程式 (2 - 1) と方程式 (2 - 15) はそれぞれ方程式 (2 - 2) と (2 - 3) に変形される.

方程式 (2 - 15) の m 個の解を $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)\}$ とすれば, 対応する $V(t)$ は次のようになる.

$$(2-19) \quad V(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_m(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} & \frac{dv_2(t)}{dt} & \cdots & \frac{dv_m(t)}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}v_1(t)}{dt^{m-1}} & \frac{d^{m-1}v_2(t)}{dt^{m-1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}v_m(t)}{dt^{m-1}} \end{bmatrix}$$

この $V(t)$ の行列式 $W(t) = \det V(t)$ を解 $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)\}$ の Wronskian という. 単独の高階微分方程式についても, 定理 I-2-3, 定理 I-2-4, 定理 I-2-5 と同様に次の定理が成り立つ.

定理 I-2-8 同次方程式 (2-15) の m 個の解 $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)\}$ について, (2-19) の行列 $V(t)$ が正則であれば, 方程式 (2-1) の一般解は (2-13) の第 1 成分で与えられる.

定理 I-2-9 方程式 (2-15) の m 個の解に対する Wronskian $W(t) = \det V(t)$ について

$$(2-20) \quad \frac{dW(t)}{dt} + a_{m-1}(t)W(t) = 0$$

が成り立つ.

定理 I-2-10 t がある区間に属しているとき, Wronskian はこの区間で, 恒等的に 0 であるか, 決して 0 にならないかのいずれか一方のみ成り立つ. よって, (2-19) で与えられる $V(t)$ はこの区間のある点で正則であれば, この区間のすべての点で正則となる.

2.3 定数係数 2 階線型方程式 (同次形の場合)

まず次のような定数係数 2 階線型同次方程式を考えよう.

$$(2-21) \quad \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + a \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) = 0$$

ここで, a, b は定数とする (複素数である場合も考える)

いま, $v(t) = e^{\lambda t}$ の形の解をさがそう. これを (2-21) に代入すると,

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$$

となり, λ は 2 次方程式

$$(2-22) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を満たせば, $v(t) = e^{\lambda t}$ は方程式 (2-21) の解となる. この 2 次方程式 (2-22) を方程式 (2-21) の 特性方程式 という. ここで, λ が虚数であるときは, Euler の公式にしたがって,

$$(2-23) \quad v(t) = e^{\lambda t} = e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \quad (\lambda = p + iq)$$

と定める.

2 次方程式 (2-22) が異なる 2 つの解 λ_1, λ_2 を持ったとすると, $v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ は方程式 (2-21) の解の基本系となっている. 実際, この場合の Wronskian は

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$$

となっている。

また、2 次方程式 (2 - 22) が重根 $\lambda = \lambda_1$ を持つときは、 $v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ が方程式 (2 - 21) の解であり、基本系になっている。 $v_2(t)$ を方程式の右辺に代入すると

$$\frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + a \frac{dv_2(t)}{dt} + bv_2(t) = (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)te^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a)e^{\lambda_1 t} = 0$$

であり、 $v_1(t)$ と $v_2(t)$ の Wronskian は

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$$

となって、 $v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ が方程式 (2 - 21) の解の基本系であることがわかる。以上まとめると次の定理を得る。

定理 I - 2 - 11 2 次方程式 (2 - 22) が異なる解 λ_1, λ_2 をもてば、 $v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ は方程式 (2 - 21) の解の基本系となっており、重根 $\lambda = \lambda_1$ を持つときは、 $v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ が方程式 (2 - 21) の解の基本系となっている。さらに、どちらの場合も方程式 (2 - 21) の一般解は $v(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)$ と書ける。

特に、 a, b が実数のときは次の結論を得る。

定理 I - 2 - 12

(1) $a^2 > 4b$ のときは、2 次方程式 (2 - 22) が異なる実数解 λ_1, λ_2 をもち、

$v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ が解の基本系となる。

(2) $a^2 = 4b$ のときは、2 次方程式 (2 - 22) は実数の重根 λ_1 をもち、

$v_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ と $v_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ が解の基本系となる。

(3) $a^2 < 4b$ のときは、2 次方程式 (2 - 22) は共役な虚数解 $\lambda = p \pm iq$ をもち、

$v_1(t) = e^{pt} \cos qt$ と $v_2(t) = e^{pt} \sin qt$ が解の基本系となる。

定理 I - 2 - 9 によれば、解の基本系は

$$v_1(t) = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \text{ と } v_2(t) = e^{pt}(\cos qt - i \sin qt)$$

であるが、

$$\hat{v}_1(t) = \frac{1}{2}v_1(t) + \frac{1}{2}v_2(t) = e^{pt} \cos qt$$

$$\hat{v}_2(t) = \frac{1}{2i}v_1(t) - \frac{1}{2i}v_2(t) = e^{pt} \sin qt$$

も解となり、基本系にもなっていることが容易に確かめられる。

問題 I - 2 - 3 上の定理の (3) を確かめよ .

問題 I - 2 - 4 a, b が実数のとき , 定理 I - 2 - 12 で与えられる解の基本系について , Wronskian を計算せよ .

問題 I - 2 - 5 次の微分方程式の一般解を求めよ .

- | | |
|---|---|
| (1) $\frac{d^2v}{dt^2} - v = 0$ | (2) $\frac{d^2v}{dt^2} - 2\frac{dv}{dt} - 3v = 0$ |
| (3) $\frac{d^2v}{dt^2} - 2\frac{dv}{dt} + v = 0$ | (4) $\frac{d^2v}{dt^2} + v = 0$ |
| (5) $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = 0$ | (6) $\frac{d^2v}{dt^2} + (1 - i)\frac{dv}{dt} - iv = 0$ |

問題 I - 2 - 6 次の微分方程式の解でカッコの中に示される条件を満たす解を求めよ .

- | | |
|--|---|
| (1) $\frac{d^2v}{dt^2} + 3v = 0$ | (初期条件 $v(0) = 0$, $\frac{dv}{dt}(0) = 1$) |
| (2) $\frac{d^2v}{dx^2} - 4\frac{dv}{dx} + 4v = 0$ | (境界条件 $v(0) = 1$, $v(1) = 1$) |
| (3) $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} - 6v = 0$ | (境界条件 $v(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$) |
| (4) $\frac{d^2v}{dx^2} - 7\frac{dv}{dx} + 10v = 0$ | (境界条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$) |

問題 I - 2 - 7 有界閉区間 $[a, b]$ において , 微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda v = 0$$

をみたし , さらに次の境界条件

$$v(a) = v(b) = 0$$

をみたす解で , 恒等的に 0 ではない解が存在するためには定数 λ はどのような数でなければならないか ? また , そのときの解を求めよ .

問題 I - 2 - 8 問題 I - 2 - 6 において , 境界条件が

$$\frac{dv}{dx}(a) = \frac{dv}{dx}(b) = 0$$

の場合について調べよ .

2.4 定数係数 2 階線型方程式 (非同次形の場合)

ここでは，右辺が $f(t)$ で与えられる次の方程式

$$(2-24) \quad \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + a \frac{du(t)}{dt} + bu(t) = f(t)$$

について，定理 I-2-8 を適用してみよう．

定理 I-2-11 で与えられる解の基本系を $v_1(t)$ ， $v_2(t)$ とし，

$$(2-25) \quad V(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} & \frac{dv_2(t)}{dt} \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} & \frac{dv_2(t)}{dt} \end{vmatrix}$$

とする．

$$V(t)^{-1} \mathbf{f}(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{bmatrix} \frac{dv_2(t)}{dt} & -v_2(t) \\ -\frac{dv_1(t)}{dt} & v_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{bmatrix} -v_2(t)f(t) \\ v_1(t)f(t) \end{bmatrix}$$

となるので，(2-13) の第 1 成分を計算すれば，(2-24) の一般解は

$$(2-26) \quad u(t) = -v_1(t) \int \frac{v_2(t)f(t)}{W(t)} dt + v_2(t) \int \frac{v_1(t)f(t)}{W(t)} dt + c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)$$

で与えられる．

注意 公式 (2-26) によって，一般解を求める方法のほかに，定理 I-2-7 から，方程式 (2-24) の特殊解 $u_0(t)$ を一つ求めて，同次方程式 (2-21) の解の基本系 $v_1(t)$ ， $v_2(t)$ の一次結合を加えた

$$u(t) = u_0(t) + c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)$$

を方程式 (2-24) の一般解として与えることもできる．

例題 13

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 4 \frac{du(t)}{dt} + 3u(t) = e^{2t}$$

この特性方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ であるので，その根は $\lambda = -1$ ， $\lambda = -3$ となる．よって，同次方程式の解の基本系は $\{e^{-t}, e^{-3t}\}$ であり， $W(t) = -2e^{-4t}$ である．公式 (2-26) にあてはめれば，

$$\begin{aligned} u(t) &= -e^{-t} \int \left(-\frac{1}{2}e^{4t}\right) e^{-3t} e^{2t} dt + e^{-3t} \int \left(-\frac{1}{2}e^{4t}\right) e^{-t} e^{2t} dt + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \\ &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{2t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} = \frac{1}{15}e^{2t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \end{aligned}$$

[別解] $u = ke^{2t}$ の形で特殊解をさがそう．これを方程式に代入すると，

$$4ke^{2t} + 4 \cdot 2ke^{2t} + 3ke^{2t} = e^{2t}$$

これより， $k = \frac{1}{15}$ が得られ， $u = \frac{1}{15}e^{2t}$ が特殊解として求まるので，同次方程式の一般解 $c_1v_1(t) + c_2v_2(t)$ を加えた $u(t) = \frac{1}{15}e^{2t} + c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}$ がもとの方程式の一般解となる．

[注意] 特殊解の求め方

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{du}{dt} + bu = f(t) \text{ において}$$

1. $f(t) = P(t)$ ($P(t)$ は n 次の多項式) のとき

- (1) $b \neq 0$ であれば， $u_0 = Q(t)$ ($Q(t)$ は n 次の多項式) として求まる．
- (2) $b = 0$ ， $a \neq 0$ であれば， $u_0 = tQ(t)$ ($Q(t)$ は n 次の多項式) として求まる．
- (3) $b = 0$ ， $a = 0$ であれば， $u = t^2Q(t)$ ($Q(t)$ は n 次の多項式) として求まる．

2. $f(t) = ce^{\lambda_0 t}$ のとき

- (1) λ_0 が特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解でなければ， $u = ke^{\lambda_0 t}$ として求まる．
- (2) λ_0 が特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の単根であれば， $u = kte^{\lambda_0 t}$ として求まる．
- (3) λ_0 が特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の重根であれば， $u = kt^2e^{\lambda_0 t}$ として求まる．

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{du}{dt} + bu = f(t) + g(t) \text{ であるときは}$$

2 つの方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{du}{dt} + bu = f(t)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{du}{dt} + bu = g(t)$$

のそれぞれの特殊解を 2 つ加えたものがもとの方程式の特殊解になっている．

問題 I - 2 - 9 次の方程式の一般解を求めよ．

$$(1) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - u = e^{2t}$$

$$(2) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt} - 3u = e^t$$

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt} + u = e^t$$

$$(4) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + u = \cos 2t$$

$$(5) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u = e^{-t} \cos t$$

$$(6) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} = e^{3t} + t^2$$

2.5 定数係数高階線型方程式 (その 1)

定数係数のときは，3 階以上の方程式の場合も 2 階の方程式の場合と同じである．非同次方程式

$$(2-27) \quad \frac{d^m u(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) = f(t)$$

と同次方程式

$$(2-28) \quad \frac{d^m v(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} v(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = 0$$

を考え，(2-28) の解を $v = e^{\lambda t}$ の形でさがそう．これを (2-28) に代入すると，

$$(\lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

が得られる． m 次方程式

$$(2-29) \quad \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

を (2-27) あるいは (2-28) の 特性方程式 という．

特性方程式 (2-29) が次のように一次式に因数分解されたとしよう．(このように因数分解されることは『代数学の基本定理』として知られている)

$$(2-30) \quad (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0$$

ここで， λ_i は異なるものとする．このとき，各 λ_i に対して， m_i を根 λ_i の 重複度 という．そして， $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$ となっている．

このようなとき，方程式 (2-28) の解の基本系は次のような形で得られる．

$$(2-31) \quad \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} & , & t e^{\lambda_1 t} & , \quad \cdots & , & t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} & , & t e^{\lambda_2 t} & , \quad \cdots & , & t^{m_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ e^{\lambda_k t} & , & t e^{\lambda_k t} & , \quad \cdots & , & t^{m_k-1} e^{\lambda_k t} \end{array}$$

これらのことから，方程式 (2-28) の一般解は解の基本系 (2-30) の一次結合として表わせる．そして，非同次方程式 (2-27) の一般解は，2 階の方程式と同様に (2-13) を適用すれば得られる．そのほかに，非同次方程式 (2-27) の特殊解を一つ求めて，それに同次方程式 (2-28) の一般解を加えたものが非同次方程式 (2-27) の一般解を与えることも 2 階の方程式の場合と同じである．

問題 I - 2 - 10 次の方程式の解の基本系と一般解を求めよ .

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d^3 v}{dt^3} - \frac{dv}{dt} = 0 & (2) \quad & \frac{d^3 v}{dt^3} - 2 \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \\ (3) \quad & \frac{d^3 v}{dt^3} - 3 \frac{d^2 v}{dt^2} + 3 \frac{dv}{dt} - v = 0 & (4) \quad & \frac{d^4 v}{dt^4} - v = 0 \\ (5) \quad & \frac{d^5 v}{dt^5} - 4 \frac{d^4 v}{dt^4} + 6 \frac{d^3 v}{dt^3} - 4 \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} = 0 \\ (6) \quad & \frac{d^5 v}{dt^5} + 5 \frac{d^4 v}{dt^4} + 10 \frac{d^3 v}{dt^3} + 10 \frac{d^2 v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + v = 0 \end{aligned}$$

問題 I - 2 - 11 $f(t) = t^2$ と $f(t) = e^t$ の場合に , 次の方程式の解の基本系と一般解を求めよ .

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d^3 u}{dt^3} - \frac{du}{dt} = f(t) & (2) \quad & \frac{d^3 u}{dt^3} - 2 \frac{d^2 u}{dt^2} = f(t) \\ (3) \quad & \frac{d^3 u}{dt^3} - 3 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3 \frac{du}{dt} - u = f(t) & (4) \quad & \frac{d^4 u}{dt^4} - u = f(t) \\ (5) \quad & \frac{d^5 u}{dt^5} - 4 \frac{d^4 u}{dt^4} + 6 \frac{d^3 u}{dt^3} - 4 \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = f(t) \\ (6) \quad & \frac{d^5 u}{dt^5} + 5 \frac{d^4 u}{dt^4} + 10 \frac{d^3 u}{dt^3} + 10 \frac{d^2 u}{dt^2} + 5 \frac{du}{dt} + u = f(t) \end{aligned}$$

2.6 定数係数高階線型方程式 (その 2—微分作用素)

微分作用素 $L(t, \frac{d}{dt}) = a_m(t) \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1}(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0(t)$ を次のように定める .

定義

$$\begin{aligned} L(t, \frac{d}{dt})u(t) &= \left(a_m(t) \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1}(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0(t) \right) u(t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} a_m(t) \frac{d^m u(t)}{dt^m} + a_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0(t) u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{例 10} \quad & \left(a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t) \right) \left(b_1(t) \frac{d}{dt} + b_0(t) \right) u(t) \\
&= \left(a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t) \right) \left(b_1(t) \frac{du}{dt} + b_0(t) u \right) \\
&= a_1(t) \frac{d}{dt} \left(b_1(t) \frac{du}{dt} + b_0(t) u \right) + a_0(t) \left(b_1(t) \frac{du}{dt} + b_0(t) u \right) \\
&= a_1(t) b_1(t) \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{db_1(t)}{dt} \frac{du}{dt} + a_1(t) b_0(t) \frac{du}{dt} + \\
&\quad + a_1(t) \frac{db_0(t)}{dt} u + a_0(t) b_1(t) \frac{du}{dt} + a_0(t) b_0(t) u \\
&= a_1(t) b_1(t) \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \left[a_1(t) b_0(t) + a_0(t) b_1(t) + a_1(t) \frac{db_1(t)}{dt} \right] \frac{du}{dt} + \\
&\quad + \left[a_0(t) b_0(t) + a_1(t) \frac{db_0(t)}{dt} \right] u
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
& \left(a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t) \right) \left(b_1(t) \frac{d}{dt} + b_0(t) \right) \\
&= a_1(t) b_1(t) \frac{d^2}{dt^2} + \left[a_1(t) b_0(t) + a_0(t) b_1(t) + a_1(t) \frac{db_1(t)}{dt} \right] \frac{d}{dt} + \\
&\quad + \left[a_0(t) b_0(t) + a_1(t) \frac{db_0(t)}{dt} \right]
\end{aligned}$$

問題 I - 2 - 12 次の微分作用素の積を展開せよ .

- | | |
|--|--|
| (1) $\left(\frac{d}{dt} + a \right) \left(\frac{d}{dt} + b \right)$ | (2) $\left(\frac{d}{dt} + t \right) \left(\frac{d}{dt} - t \right)$ |
| (3) $\left(\frac{d}{dt} - t \right) \left(\frac{d}{dt} + t \right)$ | (4) $\left(\frac{d}{dt} + e^t \right) \left(\frac{d}{dt} + e^{-t} \right)$ |
| (5) $\left(\frac{d}{dt} + e^{-t} \right) \left(\frac{d}{dt} + e^t \right)$ | (6) $\left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2$ |
| (7) $\left(\frac{d}{dt} + a(t) \right)^2$ | |

以上のように定義すると定数係数の線型微分作用素

$$(2-32) \quad L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0$$

は、次のような一階微分作用素の積にかける。

$$(2-33) \quad L\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k}$$

すると、方程式 (2-27) は次のように書かれる。

$$(2-34) \quad \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right)u(t) = f(t)$$

ここで、 λ_i は等しいものがあったもよい。

$$(2-35) \quad u_2(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right)u(t)$$

とおくことによって、1 階の微分方程式

$$(2-36) \quad \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)u_2(t) = f(t)$$

を解くことによって、その解 $u_2(t)$ が得られ、それを (2-35) に代入し、また、

$$(2-37) \quad u_3(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_3\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right)u(t)$$

とおいて、1 階の微分方程式

$$(2-38) \quad \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)u_3(t) = f(t)$$

に帰着され、これを続けていけば、もとの方程式 (2-27) の一般解が得られる。

問題 I - 2 - 13 上に述べた方法によって、次の方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - u = e^{2t}$$

$$(2) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt} - 3u = e^t$$

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt} + u = t$$

$$(4) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + u = \cos 2t$$

§ 3 微分方程式の数値解法

この節では、次のような 1 階の連立微分方程式の初期値問題の数値解法について説明する．未知関数は x, y の 2 個で説明するが、3 個以上の方程式についても同様のことが言える．

$$(3-1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

方程式 (3-1) を $t_0 \leq t \leq T$ の範囲で近似的に解きたい．いま、この区間 $[t_0, T]$ を N 等分し、一つの小区間の幅を $h = \frac{T-t_0}{N}$ とおこう．そして、 n 番目の分点を $t = t_n$ 、解 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ の $t = t_n$ における値を $x_n = x(t_n)$ 、 $y_n = y(t_n)$ としよう．すなわち、

$$(3-2) \quad \begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ x_n = x(t_n) \\ y_n = y(t_n) \end{cases}$$

とする．ここでは、 $t = t_n$ における x_n 、 y_n を近似的に定める．他の t における x 、 y の値は折線によって定められているものとする．

3.1 Cauchy-Euler の折線法

平均値の定理より、

$$(3-3) \quad \begin{cases} \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \frac{dx}{dt}(t_n + \theta_{1,n}h) \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = \frac{dy}{dt}(t_n + \theta_{2,n}h) \end{cases}$$

が成り立つ．(3-3) の右辺は、

$$(3-4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t_n + \theta_{1,n}h) = f(t_n + \theta_{1,n}h, x(t_n + \theta_{1,n}h), y(t_n + \theta_{1,n}h)) \\ \frac{dy}{dt}(t_n + \theta_{2,n}h) = g(t_n + \theta_{2,n}h, x(t_n + \theta_{2,n}h), y(t_n + \theta_{2,n}h)) \end{cases}$$

となり、この右辺は、 h が十分小さいとき、すなわち N が十分大きいとき、次のように近似する．

$$(3-5) \quad \begin{cases} f(t_n + \theta_{1,n}h, x(t_n + \theta_{1,n}h), y(t_n + \theta_{1,n}h)) \doteq f(t_n, x(t_n), y(t_n)) \\ g(t_n + \theta_{2,n}h, x(t_n + \theta_{2,n}h), y(t_n + \theta_{2,n}h)) \doteq g(t_n, x(t_n), y(t_n)) \end{cases}$$

すると，初期値問題 (3 - 1) の次のような近似解が得られる．

$$(3 - 6) \quad \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} \doteq x_n + hf(t_n, x_n, y_n) \\ y_{n+1} \doteq y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \end{cases}$$

この様な近似解法を Cauchy-Euler の折線法 という．Cauchy-Euler の折線法による誤差の order は一つの小区間においては h^2 の order であり，全区間においては h^1 の order である．

3.2 Runge-Kutta 法

Cauchy-Euler の折線法は大変 simple な近似法であったが，あまり精密ではない．もう少し精密にしたものが次の Runge-Kutta 法 である．

$$(3 - 7) \quad \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} \doteq x_n + \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \\ y_{n+1} \doteq y_n + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) \\ a_1 = hf(t_n, x_n, y_n) \quad , \quad b_1 = hg(t_n, x_n, y_n) \\ a_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}) \quad , \quad b_2 = hg(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}) \\ a_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}) \quad , \quad b_3 = hg(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{a_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}) \\ a_4 = hf(t_n + h, x_n + a_3, y_n + b_3) \quad , \quad b_4 = hg(t_n + h, x_n + a_3, y_n + b_3) \end{cases}$$

Runge-Kutta 法による誤差の order は一つの小区間においては h^5 の order であり，全区間においては h^4 の order である．

問題 I - 3 - 1 Runge-Kutta 法を次の微分方程式に当てはめよ．ただし，分割しない区間 $[t_0, t_1]$ で考える．

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

これは，積分 $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$ の Simpson の近似公式に対応していることを確かめよ．

§ 4 2次元の自励系の解の挙動

ここでは、次のような微分方程式について考える．

$$(4-1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases}$$

とくに、 $f(t, x, y)$ と $g(t, x, y)$ が時刻 t に関係しない場合、すなわち

$$(4-2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

とかけている場合に、この微分方程式を 自励系 (autonomous system) とよんでいる． $f(x, y)$ と $g(x, y)$ が滑らかな関数の場合には微分方程式の初期値問題の解の一意性が保証され、次の定理が成り立つ．

定理 I - 4 - 1

- (1) $x = x(t)$, $y = y(t)$ が方程式 (4 - 2) を満たせば、任意の定数 α に対して、
 $x = x(t + \alpha)$, $y = y(t + \alpha)$ も方程式 (4 - 2) を満たす．
- (2) 時刻 $t = t_1$ における初期値 $x(t_1) = x_0$, $y(t_1) = y_0$ を与えた時の方程式 (4 - 2) の解を
 $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ とすれば、別の時刻 $t = t_2$ において、同じ初期値
 $x(t_2) = x_0$, $y(t_2) = y_0$ を与えた初期値問題の解 $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ は

$$x_2(t) = x_1(t + t_1 - t_2) \quad , \quad y_2(t) = y_1(t + t_1 - t_2)$$

 で与えられる．
- (3) 方程式 (4 - 2) の解曲線が自分自身と共有点をもてば、それは周期解である．すなわち、
 ある正の数 p があって、 $x(t + p) \equiv x(t)$, $y(t + p) \equiv y(t)$ が成り立つ．

問題 I - 4 - 1 上の定理を証明せよ．

$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ となる点 (x_0, y_0) があれば、この点を初期値とする解は
 $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ となって、時刻 t が変化しても、解は変化しない．このような点を

平衡点または不動点とよぶ．平衡点の近くにおける解の挙動を調べるために，線型の自励系について調べよう．

$$(4-3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

いま， $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}$ ， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$ とおくと，方程式 (4-3) は

$$(4-4) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

と書ける．ここで，行列 A を Jordan の標準形に表わすと，ある正則行列 P があって，

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ は行列 } A \text{ の実数の固有値})$$

あるいは

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (\lambda_1 \text{ は行列 } A \text{ の重複度 } 2 \text{ の実数の固有値})$$

あるいは

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \quad (p+qi \text{ と } p-qi \text{ は行列 } A \text{ の虚数の固有値})$$

となる．方程式 (4-4) に左から P^{-1} をかけると，

$$(4-5) \quad \frac{dP^{-1}\mathbf{x}}{dt} = P^{-1}APP^{-1}\mathbf{x} = JP^{-1}\mathbf{x}$$

ここで， $P^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ とおけば，

$$(4-6) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = J\mathbf{y}$$

と書ける．

時刻 t が限りなく大きくなるとき ($t \rightarrow \infty$ のとき) に解がどうなるかを調べよう．

以下において， X_0, Y_0, x_0, y_0 は $t=0$ のときの $X(t), Y(t), x(t), y(t)$ の初期値とし， $(X_0, Y_0) \neq (0, 0)$ ， $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ とする．

$$(I) \quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ のとき } (\lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ とする})$$

方程式 (4 - 6) の解は $X = X_0 e^{\lambda_1 t}$, $Y = Y_0 e^{\lambda_2 t}$ となり ,

(I-1) $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ のときは ,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ となり , } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty$$

(I-2) $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = 0$ のときは ,

$Y_0 \neq 0$ であれば,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ となり , } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty$$

$$Y_0 = 0 \text{ であれば, } \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(I-3) $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0$ のときは ,

$Y_0 \neq 0$ であれば,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ となり , } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty$$

$Y_0 = 0$ であれば,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow 0 \text{ となり , } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow 0$$

(I-4) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ のときは ,

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

(I-5) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 < 0$ のときは ,

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ Y_0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow P \begin{bmatrix} 0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

(I-6) $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ のときは ,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow 0 \text{ となり , } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow 0$$

(II) $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ のとき

方程式 (4 - 6) の解は $X = X_0 e^{\lambda_1 t} + Y_0 t e^{\lambda_1 t}$, $Y = Y_0 e^{\lambda_1 t}$ となり ,

(II-1) $\lambda_1 > 0$ のときは ,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ となり , } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty$$

(II-2) $\lambda_1 = 0$ のときは ,

$Y_0 \neq 0$ であれば,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ となり, } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty$$

$$Y_0 = 0 \text{ であれば, } \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(II-3) $\lambda_1 < 0$ のときは,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow 0 \text{ となり, } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow 0$$

(III) $J = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$ のとき

方程式 (4-6) の解は

$$X = e^{pt}(X_0 \cos qt + Y_0 \sin qt), \quad Y = e^{pt}(Y_0 \cos qt - X_0 \sin qt)$$

となり,

(III-1) $p > 0$ のときは,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ となり, } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty$$

(III-2) $p = 0$ のときは,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \text{ となり, } (x(t), y(t)) \text{ は周期 } \frac{2\pi}{q} \text{ の楕円軌道を描く.}$$

(III-3) $p < 0$ のときは,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2} \rightarrow 0 \text{ となり, } \|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow 0$$

問題 I - 4 - 2 次の行列を Jordan の標準形にせよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

問題 I - 4 - 3 上の (I-1) ~ (I-6), (II-1) ~ (II-3), (III-1) ~ (III-3) の各場合の微分方程式の例を挙げ, その解曲線についてコンピュータを用いて調べよ.