3　線形代数

3.1　行列の演算

- $m \times n$ 行列 ((m, n) 型行列)　,　行と列　,　(i, j) 成分
- n 次正方行列
- 正方行列の対角成分
- 列ベクトル (縦ベクトル)　,　行ベクトル (横ベクトル)
- 行列の和・差　,　行列のスカラー倍
- 零行列
- 行列の積（一般に，$AB \neq BA$ であることに注意)
- 単位行列
- 転置行列　,　対称行列
- 対角行列　,　三角行列
- 逆行列　,　正則行列

問題 1. 次の計算をせよ。

(1) $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$　　　(2) $3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

問題 2. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

とするとき，次の計算をせよ．ただし，計算できないものもある．

(1) $A\boldsymbol{x}$　　(2) $A\boldsymbol{y}$　　(3) $B\boldsymbol{x}$　　(4) $B\boldsymbol{y}$

(5) AB　　(6) BA　　(7) $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}$　　(8) ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$

問題 3. A , B を n 次正方行列とする.

(1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成り立つための条件は？

(2) $AB = BA$ であるとき，

$$(A+B)^n = {}_nC_0A^n + {}_nC_1A^{n-1}B + \cdots + {}_nC_kA^{n-k}B^k + \cdots + {}_nC_nB^n$$

が成り立つことを示せ.

問題 4. (1) 任意の n 次正方行列 A に対して，$(\lambda I)A = A(\lambda I)$ であることを確かめよ．(ただし，I は n 次の単位行列とする)

(2) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$ を計算せよ.

3.2　連立１次方程式の解法と逆行列の計算

・連立１次方程式の解法において許される操作

I.　１つの方程式に０でない数を掛ける．

II.　１つの方程式に，他の方程式を何倍かしたものを加える．

III.　２つの方程式を入れ替える．

・連立１次方程式を行列で表現する．($[A \;\; \boldsymbol{b}]$)

・行列の行の基本変形

I.　１つ行に０でない数を掛ける．

II.　１つの行に，他の行を何倍かしたものを加える．

III.　２つの行を入れ替える．

・階段行列と行列の階数 (rank)

・非同次連立１次方程式の解の個数 (n は未知数の個数)

(1)　解が一意的に存在する　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}([A \;\; \boldsymbol{b}])=n$

(2)　解が無数に存在する　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}([A \;\; \boldsymbol{b}])<n$

(3)　解が存在しない　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}([A \;\; \boldsymbol{b}])$

・同次連立１次方程式の解の個数 (n は未知数の個数)

(1)　解が一意的に存在する (自明な解しか持たない)　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{rank}(A)=n$

(2)　解が無数に存在する　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{rank}(A)<n$

・逆行列の計算　$[A \;\; I] \longrightarrow [I \;\; A^{-1}]$

問題 1. 次の連立一次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+y-5z=-4 \\ -2x+6y-9z=-2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-2y+5z=0 \\ -3x+y+2z=-3 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x-2y-3z=1 \end{cases}$

問題 2. 次の連立一次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y+9z=14 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=2 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$

問題 3. 次の行列は正則か？　正則行列であればその逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

3.3　行列式

置換群

集合 X からそれ自身への全単射を集合 X の置換という．いま，$X = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．この X の置換全体を S_n と書くことにする．(S_n は何個の元からなるか？)

置換の記号

1 つの置換を σ とする．

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ は $\sigma(1) = j_1, \sigma(2) = j_2, \cdots, \sigma(n) = j_n$ を表わす．

$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ は $\sigma(j_1) = k_1, \sigma(j_2) = k_2, \cdots, \sigma(j_n) = k_n$ を表わす．

$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ は $\sigma(j_1) = k_1, \sigma(j_2) = k_2, \cdots, \sigma(j_n) = k_n$ を表わす．

自分自身に移る元は省略することがある．例えば,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

次のような置換を **巡回置換** という．

$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_r \\ j_2 & j_3 & j_4 & \cdots & j_1 \end{pmatrix}$　これを　$(j_1, j_2, j_3, \cdots, j_r)$ と表わす．

次のような 2 つだけの入れ替えの置換を **互換** という．

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_2 & j_1 \end{pmatrix} = (j_1, j_2)$$

置換の積

$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$　,　$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ とするとき,

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

これは置換を写像とみなしたとき，τ で写してから σ で写す写像の積である．

このように定義すると $(S_n, \cdot)$ は群になる．

問題 1　S_3 の元をすべて挙げよ．単位元を $e = \sigma_0$ とし，そのほかを $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_5$ とせよ．また，積の演算表を作れ．さらに，非可換な元の組をすべて挙げよ．

問題 2　互換の積 $(k_1, k_r)(k_1, k_{r-1})\cdots(k_1, k_2)$ が巡回置換であることを確かめよ．また，巡回置換 $(1, 2, 3, 4, 5)$ を互換の積で表わせ．

問題 3　置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ を巡回置換の積で表わし，さらに互換の積で表わせ．

問題 2 と問題 3 のように，すべての置換は互換の積で表わせる (表わし方は 1 通りではない)．この積が偶数個の積であるか奇数個の積であるかは与えられた置換によって定まる．偶数個の積で表わせる置換を **偶置換**，奇数個の積で表わせる置換を **奇置換** とよぶ．

問題 4　S_3 の各置換が偶置換か奇置換か判定せよ．

行列式の定義

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ を n 次正方行列とする．

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただし，$\epsilon(\sigma)$ は σ が偶置換のときは $+1$ を，奇置換のときは -1 を表わす．

問題 5　$A == \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とするとき，

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

を計算せよ．

問題 6　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とするとき，

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

を計算せよ．

行列式の基本的な性質 1

(1)　$\det A = \det({}^t A)$

(2)　$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$

(3)　1 つの行に，他の行を何倍かしたものを加えても行列式の値は変わらない.

(3')　1 つの列に，他の列を何倍かしたものを加えても行列式の値は変わらない.

(4)　2 つの行 (列) を入れ替えると符合が変わる (マイナスがつく).

(5)　1 つの行 (列) を c 倍すると行列式の値も c 倍となる.

余因子

$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ を n 次正方行列とする.

A の (i,j) 余因子 A_{ij} とは A から第 i 行と第 j 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものをいう.

行列式の基本的な性質 2

(6)　$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

(i 行に関する余因子展開)

(6')　$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})$

(j 列に関する余因子展開)

(7)　$i \neq j$ のとき，$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$

(7')　$i \neq j$ のとき，$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = 0$

問題 7　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

問題 8　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とするとき，$\det(\lambda I - A)$ を計算せよ.