1 差分 (定差) 方程式の例

例 1 (人口の変化) ある国の人口は毎年 a %の割合で増えていきます．n 年後の人口を P_n とするとき，P_{n+1} を P_n で表わしなさい．

例 2 (Fibonacci の数列) 各項はその前の項と前の前の項の和になっていて，最初の項 a_0 は 0 であり，その次の項 a_1 が 1 である数列を Fibonacci の数列という．すなわち，

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_0 = 0 \ , \ a_1 = 1$$

例 3 平面上に n 本の直線があり，どの 2 本の直線も平行でなく，どの 3 本の直線も 1 点では交わらないとき，これら n 本の直線により分割される領域の個数を a_n とする．a_{n+1} を a_n で表わしなさい．

例 4(ロジスティック増殖) ある池にメダカがすんでいます。メダカはたくさんの子供を生むのですが一年後までには相当数の子供が死んでしまいます。また，この湖もそんなに広いわけではないのでメダカの数が C 匹を超えると次の年には減ってしまいます。このような理由で現在のメダカの数を p とすると，次の年のメダカの数は前の年より $a(1-p/C)p$ 万匹増える (ただし，p が C を超えると減る) とします (a はある正の定数)。n 年後にはメダカの数はどうなるでしょうか。n 年後のメダカの数を p_n 匹として p_{n+1} を p_n で表わしなさい．

例 5(携帯電話の普及) 日本の人口を N 人とします．その内で，現在携帯電話を所有している人の数を x_0 とします．携帯電話の普及は現在携帯電話を所有している人の数に比例し，また現在携帯電話を所有していない人の数にも比例するとします．このことから，次のような漸化式が成り立ちます．

$$x_{n+1} - x_n = kx_n(N - x_n)$$

例 6 (木村先生の線形代数より — ある森の物語) ある森にウサギとキツネが住んでいます。ウサギは，一年間に a 倍に増えるのですがその間に何匹かはキツネに食べられてしまいます。一匹のキツネは平均して，一年に b 匹のウサギを食べます。キツネについては，年をとったり，食料難のために，毎年，c % のキツネが死んでいきます。しかし，子ギツネも生まれます。生まれる子ギツネの数は，前の年のウ

サギの数の d % になります。それは母ギツネがウサギの数を見て子供を作るからです。ウサギの数とキツネの数は n 年後にはどうなるでしょうか。n 年後のウサギの数を R_n ，キツネの数を F_n とするとき, R_{n+1} と F_{n+1} を R_n , F_n を用いて表わしなさい．また，この式を行列の形

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

で書きなさい。

例 7 (ある森の物語の変形)　ある森にウサギとキツネが住んでいます。前の年のウサギの数を R, キツネの数を F とすると，次の年のウサギの数は病気で死んだり生まれたりして $(1+A(1-R/C))R$ 匹になるのですが，そのほかに キツネに DRF 匹食べられてしまいます。また，次の年のキツネの数は $QDRF$ 匹になります。ウサギの数とキツネの数は n 年後にはどうなるでしょうか。n 年後のウサギの数を R_n ，キツネの数を F_n とするとき, R_{n+1} と F_{n+1} を R_n , F_n を用いて表わしなさい.

(ここで，A:増殖率，C:容量，D:捕食率，Q:転換率　といい，いずれも正の定数とする)

例 8　アユの寿命は 3 年とします。ことし生まれた赤ちゃんアユのうち，一年後まで生き残れるアユは 5 %とします。また，満 1 歳のアユが次の年まで生き残れるのは半分とします。満 2 歳のアユが次の年まで生き残れるのも半分とします。満 3 歳のアユは次の年までにはすべて死んでしまいます。また，満 1 歳アユは毎年一匹あたり平均 10 匹の赤ちゃんアユを産み，満 2 歳アユは毎年一匹あたり 20 匹の赤ちゃんアユを産むとします。満 3 歳のアユはもう子供を産みません。(もっと沢山生むのですが大半は孵化しなかったり，大きな魚などに食べられてしまう)．いま，一匹もアユの住んでいない湖に赤ちゃんアユを 100 万匹放流すれば，n 年後の各年令のアユの個数はそれぞれ何匹になるでしょうか。n 年後の赤ちゃんアユの数を P_n^0 ，満 1 歳アユの数を P_n^1 ，満 2 歳アユの数を P_n^2 ，満 3 歳アユの数を P_n^3 として漸化式 (差分方程式) を作りなさい。また，例 5 のようにこれを行列の形で書きなさい。

例 9 (ローン返済　2004 年兵庫県立大学経済・経営学部前期入試問題の変形)　A 氏はある年に B 銀行から年利 r で a 円を借りることにした．1 年後から毎年借りた日と同じ日に一定額 b 円を返済して，20 回で返済が終わるようにしたい．$(n+1)$ 年後の返済直後のローン残高 x_{n+1} を a , b , x_n を用いて表わせ．ただし，利息の計算

は 1 年ごとの複利計算とする．また，20 回で返済が終わるようにするには b をどのように定めればよいか.

例 10 (Markov chain　天候の確率)　毎日の天候が「晴れ」,「曇り」,「雨」の 3 種類しかないとしよう.

「晴れ」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.7,「曇り」である確率は 0.2,「雨」である確率は 0.1.「曇り」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.5,「曇り」である確率は 0.3,「雨」である確率は 0.2.「雨」の日の次の日が「晴れ」である確率は 0.3,「曇り」である確率は 0.4,「雨」である確率は 0.3 であるとしよう.

今日が「晴れ」とするとき，n 日後の天候が「晴れ」である確率を x_n,「曇り」である確率を y_n,「雨」である確率を z_n とするとき，x_{n+1} , y_{n+1} , z_{n+1} を x_n , y_n , z_n で表わせ.

例 11　$\cos n\theta$, $\sin n\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ を用いて表わしたい．$P_n(X)$ を X の n 次多項式，$Q_n(X)$ を X の $(n-1)$ 次多項式として

$$\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$$
$$\sin n\theta = Q_n(\cos\theta)\sin\theta$$

と表わせることを示し，$P_{n+1}(X)$, $Q_{n+1}(X)$ を $P_n(X)$, $Q_n(X)$ を用いて表わしなさい.

例 12　異なる n 個のものを k 組に分ける分け方の総数を $f(n,k)$ とするとき，$f(n+1,k)$ を $f(n,k)$ と $f(n,k-1)$ を用いて表わしなさい．(ヒント：特定の 1 個が単独で 1 個だけの組を作っている場合とそれが 2 個以上の組を作っている場合に分けて考えなさい)

また，$f(n,1)=1$, $f(n,n)=1$ であり，上で作った漸化式を用いて，$f(5,3)$ を計算しなさい.

例 13　自然数 n をいくつかの自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n)$ とする．また，自然数 n を k 個の自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n,k)$ とする．このとき，

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$$

である.

言い換えると $p(n,k)$ は方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad (x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1)$$

の自然数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ の個数に等しい．$p(n,k)$ を $p(n-k,k)$ と $p(n-1,k-1)$ を用いて表わせ.．(ヒント：$x_k = 1$ の場合と $x_k \geq 2$ の場合に分けて考えなさい)

さらに，これらを用いて $p(10)$ を計算しなさい．

例 14 (Mandelbrot Set)　複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + \alpha \quad , \quad z_0 = 0$$

を考える．$n \to \infty$ のとき，z_n が有界にとどまるような複素数 α の集合を Mandelbrot Set という．この Mandelbrot Set は複素平面上でどのような集合となるか？

例 15 (Julia Set)　複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + C \quad , \quad z_0 = \alpha$$

を考える．$n \to \infty$ のとき，z_n が有界にとどまるような複素数 α の集合を Julia Set という．この Julia Set は複素平面上でどのような集合となるか？ ただし，C は複素定数とする．

例 16 (Newton 法)　方程式 $f(x) = 0$ の解の近似値を求める方法に Newton 法と呼ばれるものがある．今，閉区間 $[a,b]$ で $f(x)$ は 2 回続的微分可能であるとし，$f''(x) > 0$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$　とする．このとき，方程式 $f(x) = 0$ は a と b の間に唯一つの解 $alpha$ を持つことが分かり，それは次のような方法で近似できる．$\alpha_0 = a$ とし，$x = \alpha_0$ で $y = f(x)$ の接線を考えその接線と x 軸との交点を α_1 とする．さらに，$x = \alpha_1$ において接線を引き x 軸との交点を α_2 とする．この操作を続けていくと，数列 $\{\alpha_n\}$ は方程式の解 α に収束していく．

α_{n+1} を α_n を用いて表わせ．また，閉区間 $[1,2]$ において．方程式 $f(x) = 2 - x^2$ の解 $\sqrt{2}$ を近似する漸化式を作れ．

注意

(1)　$f''(x) > 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ の時は $\alpha_0 = b$ とする．

(2)　$f''(x) < 0$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ の時は $\alpha_0 = b$ とする．

(3)　$f''(x) < 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ の時は $\alpha_0 = a$ とする．

2　十進BASICの簡単な説明

BASIC は

Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code

の略称であり,『FORTRAN』,『COBOL』,『C』,『JAVA』,『PASCAL』と同様のプログラミング言語である．十数年前までは，パソコン (NEC 製がほとんどであった) を買うと,『N88-BASIC』が標準として付属していたが，最近では『Windows』が普及して，コンピュータの用途が「ワープロ」,「表計算」,「インターネット」などが多くを占め，ほとんどのユーザーが「プログラミング」を組むことが少なくなってきている．

BASIC 言語は

(1)　形式にあまりこだわらなくて良い．

(2)　グラフィック機能が簡単に使える．

といった特徴をもっている．

この授業で使用する (仮称) 十進BASICは文教大学の白石和夫氏が作成したBASICのプログラミング言語である．詳しくは，download した自己解凍ファイルに含まれる『TUTORIAL.PDF』を参考にされるとよい．次のホームページ

http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/

から最新の (仮称) 十進BASICがdownloadでき，そのリンク先にも有用な情報が含まれている．

プログラム例1(prog1.bas　変数と四則演算)

```
10␣LET␣A=25
20␣LET␣B=37
30␣PRINT␣A+B
40␣PRINT␣A-B
50␣PRINT␣A*B
60␣PRINT␣A/B
70␣END
```

プログラム例1の説明

このプログラムにおいては行番号が付けてあるが，説明のために付けたもので，なくてもかまわない．(無いいほうがよいかも知れない)

プログラムの実行は指定が無ければ上から順に実行される．

10,20 行目　：ここで「A」,「B」は数値変数である．

変数とは記憶する場所のように考えればよい．
「LET」は変数に数値や文字を代入する命令である．(他の BASIC では省略されることが多いが，この BASIC では省略は許されない)．
数値変数名は英字で始まる英数字とする．

30–60 行目　:「PRINT」は画面に出力する命令
ここでは 2 つの変数に代入された数の和・差・積・商を表示させる．
演算記号は和 (+)，差 (–)，積 (*)，商 (/) を用いる．

70 行目　:「END」はプログラムの実行を終了させる命令.

★　`LET 変数 = 数値または数式`　(代入文)

★　`PRINT 数値または数式または文字列`　(画面への出力文)

ここで，10 行目と 20 行目を次のように変更しよう．

```
10␣INPUT␣A
20␣INPUT␣B
```

★　`INPUT 変数`　(キーボードから変数に数値や文字列を代入させる命令)

プログラム例 2(prog2.bas　数当てゲーム)

```
10␣RANDOMIZE
20␣LET␣X=INT(RND*10)
30␣INPUT␣A
40␣IF␣A<X␣THEN␣PRINT␣"もっと大きいよ"
50␣IF␣A>X␣THEN␣PRINT␣"もっと小さいよ"
60␣IF␣A=X␣THEN
70␣␣␣␣PRINT␣"あたり"
80␣␣␣␣GOTO␣110
90␣END␣IF
100␣GOTO␣30
110␣END
```

プログラム例 2 の説明

10 行目　：乱数の系列を設定する命令．

20 行目　：「INT」は整数部分を与える関数.
(「INT(Y)」は Y 以下の最大の整数を表す．Gauss の記号と同じ)
「RND」は乱数で，0 以上 1 未満の数がランダムにあらわれる．

「INT(RND*10)」は 0 以上 1 未満の数を 10 倍し，その小数点以下を切り捨てるので，0 以上 9 以下の整数がランダムにあらわれる．

40 行目　：「IF 条件 THEN 命令」は『条件』が『真』の時『命令』を実行する．『A<X』の時は「もっと大きいよ」と画面に表示する．
『"もっと大きいよ"』は文字列定数であり，文字列定数は 2 つの『"』ではさむ．

50 行目　：40 行目と同様．

60–90 行目　：『IF』文の命令が 2 つ以上あり，2 行以上にわたって書くときは次のように書く．

```
IF 条件 then
   命令 1
   命令 2
   ....
END IF
```

80,100 行目　：『GOTO 行番号』は『行番号』のところへ実行を跳ばす．

★　`RANDOMIZE`　(乱数の系列を設定する命令)

★　`INT(数値)`　(数値の整数部分を与える関数)

★　`RND`　(0 以上 1 未満の乱数を与える関数 (変数))

★　`IF 条件 THEN 命令`　(『条件』が『真』の時『命令』を実行する

★
```
IF 条件 THEN
      命令１
   ELSE
      命令２
   END IF
```

条件が真ならば（正しければ）命令 1 を実行し，偽ならば（正しくなければ）命令 2 を実行する．命令 2 をする必要がなければ，ELSE と命令 2 は省略する．

BASIC で用いられる『GOTO 文』は多用されると分かりずらい．なるべく『GOTO 文』を用いずにプログラムを作成したい．そのために上のプログラムを次のように変更する，

プログラム例 2-1(prog2-1.bas　数当てゲーム)

```
10␣RANDOMIZE
20␣LET␣X=INT(RND*10)
30␣DO
40␣␣␣␣INPUT␣A
50␣␣␣␣IF␣A<X␣THEN␣PRINT␣"もっと大きいよ"
60␣␣␣␣IF␣A>X␣THEN␣PRINT␣"もっと小さいよ"
70␣LOOP␣UNTIL␣A=X
80␣PRINT␣"あたり"
90␣END
```

前判定反復

(1)
```
DO WHILE 条件
    命令
LOOP
```

(2)
```
DO UNTIL 条件
    命令
LOOP
```

繰り返しが始まる前に判定し

(1) は条件が真であれば，命令を繰り返す.

(2) は条件が偽であれば，命令を繰り返す.

後判定反復

(3)
```
DO
    命令
LOOP WHILE 条件
```

(4)
```
DO
    命令
LOOP UNTIL 条件
```

繰り返し 1 回終わった後で判定し

(3) は条件が真であれば，命令を繰り返す.

(4) は条件が偽であれば，命令を繰り返す.

プログラム例 3(prog3.bas　1 から 100 までの和)

```
10␣LET␣S=0
20␣FOR␣K=1␣TO␣100
30␣␣␣␣LET␣␣S=S+K
40␣NEXT␣K
50␣PRINT␣S
60␣END
```

プログラム例 3 の説明

20–40 行目 ：繰り返し．変数 (何でも良い)『K』を 1 ずつ増やしながら，100 まで繰り返す．

『IF』〜『NEXT』は次のように用いる．

```
★ FOR 変数=初期値 TO 終期値
       命令1
       命令2
       ....
   NEXT 変数
```

練習 1

(1) 『INPUT』を用いてキーボードから入力した数までの和を求めるプログラムを作れ．

(2) (1) を変更して

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

を求めるプログラムを作れ．

(3) (1) を変更して

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を求めるプログラムを作れ．

(4) (1) を変更して

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

を求めるプログラムを作れ．

(5) (4) を変更して，自然対数の底 (Napier の定数)e の近似値

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

を求めるプログラムを作れ．

グラフィックを用いたプログラム

プログラム例 4(prog4.bas　関数 $y = x^3 - 6x$ のグラフを描く)

```
10␣LET␣␣left=-5
20␣LET␣␣right=5
30␣LET␣␣bottom=-10
40␣LET␣␣top=10
50␣LET␣␣h=0.02
60␣SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
70␣DRAW␣GRID
80␣DRAW␣AXES
90␣def␣f(x)=x^3-6*x
100␣for␣x=-5␣to␣5-h␣step␣h
110␣␣␣LET␣␣x1=x
120␣␣␣LET␣␣y1=f(x1)
130␣␣␣LET␣␣x2=x+h
140␣␣␣LET␣␣y2=f(x2)
150␣␣␣plot␣lines:␣x1,y1;x2,y2
160␣next␣x
170␣END
```

プログラム例 4 の説明

10-40 行目 ：変数 left,right,bottom,top に数値を代入している．この数値は 60 行目でグラフィック座標の左右下上を指定するのに用いられている．

50 行目 ：グラフを折線で描くときの x の幅を指定する変数 h に数値を代入している．

60 行目 ：グラフィック座標の左右上下の座標を指定している．

70 行目 ：グラフィック画面の格子を描いている．

80 行目 ：グラフィック画面で座標軸を描いている．

90 行目 ：関数 $f(x) = x^3 - 6x$ を定義している．

100-160 行目 ：x の値を -5 から $5 - h$ まで h ずつ増やしながらその間の命令を繰り返す．

110-120 行目 ：折線を描く線分の始点の座標 $x1$ と $y1$ に数値を代入している．

130-140 行目 ：折線を描く線分の終点の座標 $x2$ と $y2$ に数値を代入している．

150 行目 ：グラフィック座標 $(x1, y1)$ と $(x2, y2)$ の点を線分で結んでいる．

160 行目 ：x の値を h だけ増やして，100 行目に戻る．x の値が $5 - h$ を超えたら戻らない..

170 行目 ：プログラムを終了する．

★ `SET WINDOW 左端 , 右端 , 下 , 上` (グラフィック座標の指定)

★ `for 変数=数値1 to 数値2 step 数値3`

```
   ...
next 変数
```

変数の値を数値1から数値2まで数値3ずつ増やしながら ··· を繰り返し実行する.

★ `DRAW GRID` (格子を描く)

★ `DRAW AXES` (座標軸を描く)

★ `PLOT LINES: 数値1, 数値2; 数値3, 数値4`

(数値1, 数値2) から (数値3, 数値4) まで線分を引く.

プログラム例5(prog5.bas　媒介変数表示された曲線:サイクロイド (cycloid) を描く)

```
LET␣␣left=-1
LET␣␣right=20
LET␣␣bottom=-10
LET␣␣top=10
LET␣␣h=0.02
SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
DRAW␣GRID
DRAW␣AXES
def␣f(t)=t-sin(t)
def␣g(t)=1-cos(t)
for␣t=0␣to␣20-h␣step␣h
␣␣␣LET␣␣x1=f(t)
␣␣␣LET␣␣y1=g(t)
␣␣␣LET␣␣x2=f(t+h)
␣␣␣LET␣␣y2=g(t+h)
␣␣␣plot␣lines:␣x1,y1;x2,y2
next␣t
END
```

練習2　以下,『SET WINDOW』で適当な値を定め次のグラフを描くプログラムを作りなさい.

(1) 原点を中心とし，半径が1である円を描け.

$$(f(t) = \cos t \quad , \quad g(t) = \sin t \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(2)　$f(t) = \cos t$　,　$g(t) = \sin 3t$　,　$0 \leqq t \leqq 2\pi$

(3)　(極座標 cardioid=心臓形)　$r = 1 + \cos\theta$
(媒介変数表示すれば, $x = (1{+}\cos t)\cos t$, $y = (1{+}\cos t)\sin t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$)

差分方程式の例のプログラム

差分方程式の例 1(example01.bas　マルサスの人口論)

$$P_{n+1} = (1 + a/100)P_n \quad , \quad a = 3 \quad , \quad P_0 = 100 \text{ 万人}$$

```
LET␣A=3
LET␣P0=100
INPUT␣N
FOR␣K=1␣TO␣N
␣␣␣LET␣␣P1=(1+A/100)*P0
␣␣␣PRINT␣K,P1
␣␣␣LET␣P0=P1
NEXT␣K
END
```

グラフ化

```
LET␣A=3
LET␣P0=100
INPUT␣N
SET␣WINDOW␣0,N,0,2000
FOR␣K=1␣TO␣N
␣␣␣LET␣␣P1=(1+A/100)*P0
␣␣␣PRINT␣K,P1
␣␣␣PLOT␣LINES:K-1,P0;K,P1
␣␣␣LET␣P0=P1
NEXT␣K
END
```

上のプログラムを 配列 を用いて書き直そう.

配列を用いたプログラム

```
OPTION␣BASE␣0
LET␣A=3
INPUT␣N
DIM␣P(N)
LET␣P(0)=100
SET␣WINDOW␣0,N,0,2000
FOR␣K=1␣TO␣N
␣␣␣LET␣␣P(K)=(1+A/100)*P(K-1)
␣␣␣PRINT␣K,P(K)
␣␣␣PLOT␣LINES:K-1,P(K-1);K,P(K)
NEXT␣K
END
```

★　`OPTION BASE 0`　(配列宣言で添字の下限の値を 0 にする)

★　`DIM P(N)`　(配列 P の宣言．配列 P の次元を 1 とし，添字の上限を N とする)
P(0) または P(1) から P(N) まで用いることが出来る．

練習 3　以下，差分方程式の例を計算するプログラムを作りなさい．

(1) 例 2(Fibonacci の数列) を計算するプログラム (example02.bas) を作りなさい．

(2) 例 3(平面上の n 本の直線によって分割される領域の個数) を計算するプログラム (example03.bas) を作りなさい．　($a_{n+1} = a_n + n + 1$)

(3) 例 4(ロジスティック増殖) を計算するプログラム (example04.bas) を作りなさい．また，この結果をグラフ化しなさい．
($p_{n+1} = \{1 + (a/100)(1 - p_n/C)\}p_n$,　$a = 5$,　$p_0 = 100$,　$C = 700$)

(4) 例 5(携帯電話の普及) を計算するプログラム (example05.bas) を作りなさい．また，この結果をグラフ化しなさい．
($x_{n+1} = x_n + kx_n(N - x_n)$,　$k = 0.1$,　$x_0 = 100$,　$N = 10000$)

(5) 例 6(ウサギとキツネ 1) を計算するプログラム (example06.bas) を作りなさい．また，この結果をグラフ化しなさい．

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ d/100 & 1 - c/100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

$a = 5$, $b = 10$, $c = 5$, $d = 5$, $R_0 = 1000$, $F_0 = 50$

(6) 例 7(ウサギとキツネ 2) を計算するプログラム (example07.bas) を作りなさい.

$$R_{n+1} = \{1 + A(1 - R_n/C)\} R_n - DR_nF_n$$
$$F_{n+1} = QDR_nF_n$$

$A = 0.5$, $C = 300$, $D = 0.025$, $Q = 0.3$, $R_0 = 1000$, $F_0 = 100$

また，この結果をグラフ化しなさい.

(7) 例 8(アユの年齢別個体数) を計算するプログラム (example08.bas) を作りなさい．この結果をグラフ化しなさい.

$$\begin{bmatrix} P^0_{n+1} \\ P^1_{n+1} \\ P^2_{n+1} \\ P^3_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^0_n \\ P^1_n \\ P^2_n \\ P^3_n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} P^0_0 \\ P^1_0 \\ P^2_0 \\ P^3_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(8) 例 9(ローン返済) を計算するプログラム (example09.bas) を作りなさい.

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n - b \quad , \quad x_0 = 1000000 \quad , \quad r = 0.03 \quad , \quad b =?$$

(9) 例 10(天候の確率) を計算するプログラム (example10.bas) を作りなさい.
この結果をグラフ化しなさい.

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(10) 例 12(異なる n 個のものを k 組に分ける分け方の総数) を計算するプログラム (example12.bas) を作りなさい.

$$f(n + 1, k) = f(n, k - 1) + kf(n, k) \quad , \quad f(n, 1) = 1 \quad , \quad f(n, n) = 1$$

(11) 例 13(自然数 n をいくつかの自然数の和に分割する仕方の総数) を計算するプログラム (example13.bas) を作りなさい.

$$p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k) \quad , \quad p(n, 1) = 1 \quad , \quad p(n, n) = 1$$
$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n, k)$$

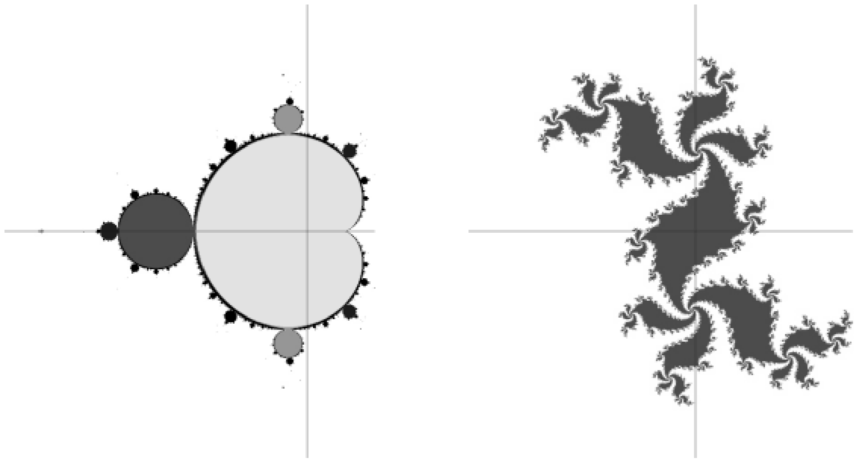

図 1: Mandelbrot set(左) と Julia set(右 $C = 0.3 + 0.5i$)

(12) 例 16(Newton の方程式の解の近似法を用いて $\sqrt{2}$ の近似値) を計算するプログラム (example16.bas) を作りなさい．

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \quad , \quad x_0 = 2$$

練習 4　例 14(Mandelbrot Set) を描くプログラムを作りなさい．差分方程式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$$

において，$n \to \infty$ のとき，(x_n, y_n) が有界にとどまるような複素数 $\alpha = (a, b)$ の集合．

(x_n, y_n) が有界にとどまらない場合には n が 200 までに原点からの距離が 2 より大きくなると考えてよい．また，n が 200 まで，原点からの距離が 2 以下にとどまるものは $n \to \infty$ のときも有界にとどまると考えてよい．

練習 5　例 15(Julia Set) を描くプログラムを作りなさい．ただし，$C = 0.3 + 0.5i$ としなさい．差分方程式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + 0.3 \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + 0.5 \\ x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$$

において，$n \to \infty$ のとき，(x_n, y_n) が有界にとどまるような複素数 $\alpha = (a, b)$ の集合．

有界にとどまるかどうかの判定は練習 4 と同様．