

第1章 統計学

このプリントを作成するに当たり以下の書物を参考にする.

[1] 白旗真吾「統計解析入門」 共立出版 (税込 2,625 円)

[2] 来栖忠・濱田年男・稲垣宣生「統計学の基礎」 裳華房 (税込 2,310 円)

ほかにも参考にするがその都度追加する.

1.1 データの整理

1.1.1 度数分布表

例1 データ (あるクラスの男子生徒の身長)

167	184	176	170	182
161	171	165	168	170
175	173	168	171	173
172	172	159	167	168
165	175			

度数分布表

階級	階級値	度数	累積度数	相対度数	累積相対度数
156～160	158	1	1	$1/22=0.045$	$1/22=0.045$
161～165	163	3	4	$3/22=0.136$	$4/22=0.182$
166～170	168	7	11	$7/22=0.318$	$11/22=0.5$
171～175	173	8	19	$8/22=0.364$	$19/22=0.864$
176～180	178	1	20	$1/22=0.045$	$20/22=0.909$
181～185	183	2	22	$2/22=0.091$	$22/22=1$

階級：通常は等間隔 (等間隔でない場合もある)

階級値：階級を代表する値, 通常はその階級の真ん中の値

累積度数：その階級までの度数の和

相対度数：(度数) ÷ (データの個数)

累積相対度数：その階級までの累積相対度数の和 = (累積度数) ÷ (データの個数)

1.1.2 代表値

平均値 (mean value)

データ： $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i n_i = \sum_{i=1}^n c_i f_i$$

度数分布表

階級値	度数	相対度数
c_1	n_1	f_1
c_2	n_2	f_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_k	n_k	f_k

問1 例1の元のデータを用いて標本平均を求めよ。
また、その度数分布表からも標本平均を計算せよ。

中央値 (median)

大きい方から (小さい方から) 数えて、真ん中の値

5個の場合は3番目の値

7個の場合は4番目の値

10個の場合は5番目と6番目の平均

奇数個 (n 個) の場合は $\frac{n+1}{2}$ 番目の値

偶数個 (n 個) の場合は $\frac{n}{2}$ 番目と $\frac{n+2}{2}$ 番目の値の平均

問2 例1の元のデータを用いて中央値を求めよ。
また、その度数分布表からも中央値を計算せよ。

最頻値 (mode)

最も多くのデータがとる値

データの個数が多い場合の度数分布表で意味がある。

問3 例1の度数分布表からも最頻値を求めよ。

1.1.3 散らばりの指標

標本分散 (sample variance)

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

度数分布表からは,

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (c_i - \bar{x})^2 n_i = \sum_{i=1}^k (c_i - \bar{x})^2 f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i^2 n_i - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k c_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

不偏分散 (unbiased variance)

$$u_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (c_i - \bar{x})^2 n_i$$

(標本) 標準偏差 ((sample) standard deviation)

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

偏差値

$$\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \times 10 + 50$$

平均偏差 (mean deviation)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

問 4 (1) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$ を計算せよ.

(2) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ が成り立つことを示せ.

(3) 不偏分散 u_x^2 を $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ と $\bar{x}^2$ を用いて表せ.

問 5 (1) 例 1 の元のデータから, 標本分散, 不偏分散, 標準偏差, 平均偏差を計算せよ. また, 各値の偏差値を計算せよ.

(2) 例 1 の度数分布表においても (1) と同様のことをしなさい.

1.1.4 その他の指標

歪度 (skewness)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^3 = \frac{1}{n \cdot s_x^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

尖度 (kurtosis)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^4 - 3 = \frac{1}{n \cdot s_x^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3$$

変動係数 (coefficient of variation)

$$c_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \quad \text{データがすべて正の値をとるときのみ意味を持つ?}$$

1.1.5 共分散と相関

例2 データ (あるクラスの男子生徒の身長・体重・胸囲)

番号	身長	体重	胸囲	番号	身長	体重	胸囲
1	167	60	87	12	173	57	81
2	184	66	88	13	168	57	84
3	176	66	90	14	171	59	86
4	170	57	85	15	173	60	86
5	182	68	90	16	172	53	87
6	161	55	90	17	172	60	87
7	171	58	84	18	159	56	83
8	165	62	90	19	167	57	84
9	168	63	89	20	168	58	87
10	170	61	90	21	165	66	94
11	175	60	86	22	175	85	102

n 個の2変量のデータ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\dots$, (x_n, y_n)

標本共分散 (sample covariance)

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

問6 次に等式が成り立つことを示せ.

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

問 7 例 2 のデータについて、身長と体重、体重と胸囲、身長と胸囲の標本共分散を求めよ。

標本相関係数 (sample correlation coefficient)

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

問 8 例 2 のデータについて、身長と体重、体重と胸囲、身長と胸囲の標本相関係数を求めよ。

問 9 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|r_{xy}| \leq 1$$

問 10 n 個の 2 変量のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ について、

$$y_i = ax_i + b \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n, a > 0)$$

の関係がある時、標本相関係数 r_{xy} を計算せよ。また $a < 0$ のときはどうなるか？

相関表=2次元度数分布

階級値	d_1	$\cdots$	d_j	$\cdots$	d_s	計
c_1	f_{11}	$\cdots$	f_{1j}	$\cdots$	f_{1s}	$f_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_i	f_{i1}	$\cdots$	f_{ij}	$\cdots$	f_{is}	$f_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_r	f_{r1}	$\cdots$	f_{rj}	$\cdots$	f_{rs}	$f_{r\cdot}$
計	$f_{\cdot 1}$	$\cdots$	$f_{\cdot j}$	$\cdots$	$f_{\cdot s}$	n

問 11 上の相関表について、問 6 の

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

はどのような形で表せるか？

問 12 x_i と y_i について、次のような一次変換を行う。

$$x_i = a + bu_i, \quad y_i = c + dv_i$$

このとき、 x_i の標本平均 $\bar{x}$, y_i の標本平均 $\bar{y}$, x_i の標本標準偏差 s_x , y_i の標本標準偏差

s_y , (x_i, y_i) の標本共分散 s_{xy} と標本相関係数 r_{xy} を u_i の標本平均 $\bar{u}$, v_i の標本平均 $\bar{v}$, u_i の標本標準偏差 s_u , v_i の標本標準偏差 s_v , (u_i, v_i) の標本共分散 s_{uv} , 標本相関係数 r_{uv} でどのように表わされるか？

1.1.6 回帰直線

n 個の 2 変量のデータ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\dots$, (x_n, y_n)

変数 y が変数 x でどのように説明されるか?

y を x の一次式で説明する. ($y = ax + b$)

x : 説明変数 = 独立変数

y : 被説明変数 = 目的変数 = 従属変数

次の L を最小にするように a, b を定める. (最小 2 乗法)

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2 = nb^2 - 2b \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 \\ &= nb^2 - 2nb(\bar{y} - a\bar{x}) + n(s_y^2 + \bar{y}^2) - 2an(s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y}) + na^2(s_x^2 + \bar{x}^2) \\ &= n \left[\{b - (\bar{y} - a\bar{x})\}^2 + a^2 s_x^2 - 2as_{xy} + s_y^2 \right] \\ &= n \left[\{b - (\bar{y} - a\bar{x})\}^2 + s_x^2 \left(a - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \right)^2 + \frac{s_x^2 s_y^2 - s_{xy}^2}{s_x^2} \right] \end{aligned}$$

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x} = \bar{y} - \bar{x} \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \bar{y} - \bar{x} r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$$

問 13 S_e を最小にする a, b は次のように偏微分法を用いて求められる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i \{y_i - (ax_i + b)\} = -2n [(s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y}) - a(s_x^2 + \bar{x}^2) - b\bar{x}] = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\} = -2n \{\bar{y} - (a\bar{x} + b)\} = 0 \end{aligned}$$

上の a, b に関する 2 つの方程式の解がすでに求めた a, b に等しくなることを確かめよ.

$\hat{e}_i = y_i - (ax_i + b)$: 残差

$S_e = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2$: 残差平方和

$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (ax_i + b - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$: 決定係数

問 14 残差平方和 S_e , 決定係数 R^2 について, 以下の等式を証明せよ.

$$(1) \quad S_e = ns_{xy}^2(1 - r_{xy}^2) \qquad (2) \quad R^2 = r_{xy}^2$$

問 15 n 個の 3 変量のデータ (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , $\dots$, (x_n, y_n, z_n) について,

変数 z を変数 x と変数 y で説明することを上と同様に考えてみなさい.

1.1.7 回帰平面

n 個の 3 変量のデータ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$

変数 z が変数 x と y でどのように説明されるか?

z を x と y の一次式で説明する. ($z = ax + by + c$)

x, y : 説明変数 = 独立変数

z : 被説明変数 = 目的変数 = 従属変数

次の L を最小にするように a, b, c を定める. (最小 2 乗法)

$$L = \sum_{i=1}^n \{z_i - (ax_i + by_i + c)\}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i \{z_i - (ax_i + by_i + c)\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n y_i \{z_i - (ax_i + by_i + c)\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n \{z_i - (ax_i + by_i + c)\} = 0$$

$$a = \frac{s_{zx}s_y^2 - s_{zy}s_{xy}}{s_x^2s_y^2 - s_{xy}^2}, \quad b = \frac{s_{zy}s_x^2 - s_{zx}s_{xy}}{s_x^2s_y^2 - s_{xy}^2}, \quad c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y}$$

$\hat{z}_i = ax_i + by_i + c$ と置くとき, z_i と $\hat{z}_i$ の相関係数 R は

$$R = \sqrt{\frac{r_{zx}^2 + r_{zy}^2 - 2r_{zx}r_{zy}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2}} : \text{重相関係数}$$

$$R^2 = \frac{r_{zx}^2 + r_{zy}^2 - 2r_{zx}r_{zy}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} : \text{決定係数 または, 寄与率}$$

問 16 a, b, c が上記のようになることを示せ.

問 17 z_i と $\hat{z}_i$ の相関係数の 2 乗 R^2 が上記のようになることを示せ.

1.2 よく用いられる離散確率分布

1.2.1 2項分布

例3 サイコロを n 回投げ、1 か 2 の目がちょうど k 回出る確率は

$$p_k = {}_nC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

例3のように、1回だけ行えば、確率 p で起こることを、独立に n 回行った時に、そのことがちょうど k 回起こる確率は

$$p_k = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (\text{ただし, } p + q = 1)$$

となる。このような分布を **2項分布** といい、 $B(n, p)$ で表す。

問18 EXCEL を用いて、 $n = 10$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ であるとき、2項分布：

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_{10}$$

を計算し、それを棒グラフで表示せよ。

一般に、

$$\mu = \sum_{k=0}^n k p_k$$

を平均という。さらに、

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 p_k$$

を分散という。また、分散の非負の平方根

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

を標準偏差という。

2項分布の平均と分散は

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = npq$$

となる。

問19 2項分布の平均と分散が上記のようになることを示せ。

1.2.2 Poisson 分布

2 項分布において, n が大きい場合には, 計算が難しい.

それで, n が大きく, $np = \lambda$ があまり大きくないとき は次の分布で近似される.

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ここで, e は, 自然対数の底と呼ばれ,

$$e = 2.71828 \dots$$

であり, 無理数である.

これを **パラメーター λ の Poisson 分布** といい, $Po(\lambda)$ で表す.

Poisson 分布は稀にしか起こらないことを数多く観察したデータに適用される.

$$\begin{aligned} \text{Poisson 分布の平均 } \mu &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \text{ と分散 } \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mu)^2 p_k \text{ は} \\ \mu &= \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda \end{aligned}$$

となる.

問 20 Poisson 分布の平均と分散が上記のようになることを示せ.

例 4 ある運送会社ではトラック 1 台が 1 ヶ月に事故を起こす確率が 1 % である. 各トラックが事故を起こすかどうかは独立であるとして, この会社が 1 ヶ月に 2 台以上事故を起こす確率を計算しよう.

1 ヶ月に k 台事故を起こす確率は, 2 項分布 $B(100, \frac{1}{100})$ にしたがう.

この 2 項分布は $np = 1$ なので, パラメーターが 1 の Poisson 分布で近似される.

よって, 1 ヶ月に 2 台以上事故を起こす確率は

$$p_2 + p_3 + p_4 + \dots = 1 - p_0 - p_1 = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 0.2642$$

で近似される.

問 21 例 4 を EXCEL を用いて, 2 項分布として計算し, また Poisson 分布で近似すると約 0.2642 となることを示せ.

問 22 EXCEL を用いて, パラメーター $\lambda = 1$ の Poisson 分布: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{10}$ までを計算し, それを棒グラフで表示せよ.

1.3 よく用いられる連続確率分布

確率変数 X が $(-\infty, \infty)$ またはその部分区間のすべてをとる可能性がある時

$$f(x) \geq 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

X が区間 (a, b) にある確率 $P(a < X < b)$ が次のような形で表わされる.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$: 確率密度関数 (probability density function)

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt : \text{分布関数 (distribution function)}$$

$$\text{平均} : \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad \text{分散} : \mu = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

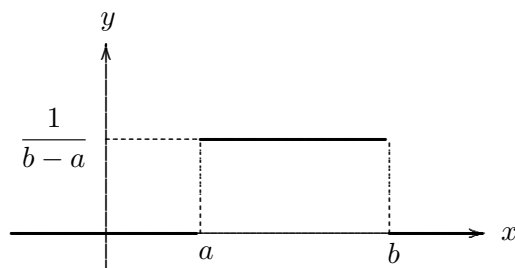
1.3.1 一様分布

実数の区間 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ のどの部分も同じような確率になる分布

$$\text{確率密度関数} : f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{for } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{for } b < x \end{cases}$$

$$\text{分布関数} : F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{for } b < x \end{cases}$$

区間 (a, b) の一様分布 (uniform distribution) $U(a, b)$



問 23 区間 (a, b) の一様分布 $U(a, b)$ の平均 μ と分散 σ^2 を計算せよ.

1.3.2 正規分布

確率密度関数 : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$ ここで, $\exp x = e^x$

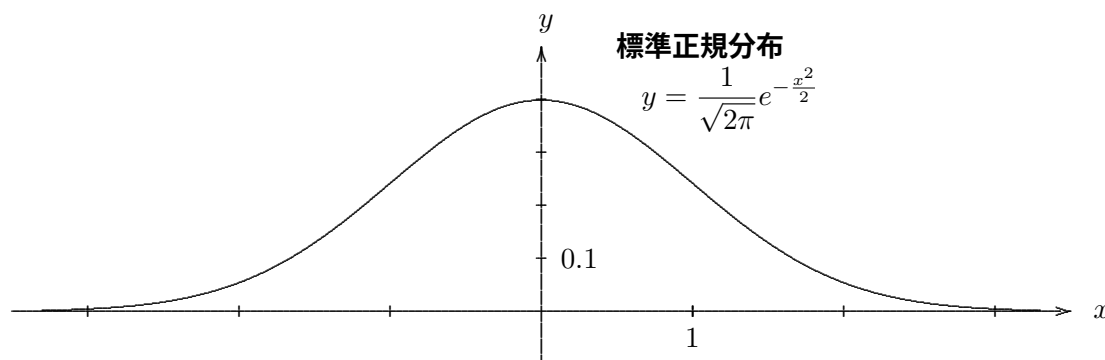
平均 μ , 分散 σ^2 の **正規分布 (normal distribution)** : $N(\mu, \sigma^2)$

$\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ である時, **標準正規分布 (standard normal distribution)** : $N(0, 1)$

正規分布の分布関数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dt$$

はよく知られた関数では表せない.



問 24 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ であることが分かっているとして,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx = 1$$

であることを示せ.

問 25 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の平均と分散がそれぞれ μ と σ^2 になることを計算せよ.

問 26 EXCEL を用いて, 標準正規分布 $N(0, 1)$ の密度関数を数値計算し, それを折れ線グラフ表示せよ.

1.3.3 Γ (ガンマ)関数と B (ベータ)関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0)$$

Γ 関数と B 関数の性質

$$(1) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (\Gamma(1) = 1, \quad n \text{ が自然数のときは } \Gamma(n+1) = n!)$$

$$(2) \quad \Gamma(s) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2s-1} dt$$

$$(3) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$$

$$(4) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

$$(5) \quad \Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{倍数の公式})$$

n 次元球の体積と表面積

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2 : \text{半径 } r \text{ の } n \text{ 次元の球}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = r^2 : \text{半径 } r \text{ の } n \text{ 次元球の球面}$$

$$n \text{ 次元球の体積} : V_n(r) = \overbrace{\int \int \cdots \int}^{n \text{ 個}} \int_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$n \text{ 次元球の表面積} : S_n(r) = \overbrace{\int \int \cdots \int}^{(n-1) \text{ 個}} \int_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = r^2} dS$$

$$(1) \quad S_n(r) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$(2) \quad \frac{dV_n(r)}{dr} = S_n(r)$$

$$(3) \quad V_n(r) = \int_0^r S_n(t) dt = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

問 27 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき, n 次元球の体積と表面積を求めよ.

Γ 関数と B 関数の性質の証明

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^s dx = \int_0^\infty \{-e^{-x}\}' x^s dx \\
 &= [(-e^{-x})x^s]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(sx^{s-1}) dx = 0 - 0 + s\Gamma(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^0 dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1 \\
 \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (x = t^2, \quad dx = 2t dt, \quad x: 0 \rightarrow \infty \text{ のとき } t: 0 \rightarrow \infty) \\
 &= \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2s-2} (2t) dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2s-1} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\
 &\quad (x = \cos^2 \theta, \quad dx = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad x: 0 \rightarrow 1 \text{ のとき } \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0) \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2p-2} \theta \sin^{2q-2} \theta (-2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int \int_D e^{-x^2} x^{2p-1} e^{-y^2} y^{2q-1} dx dy \quad (D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y\}) \\
 &= 4 \int \int_D e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy
 \end{aligned}$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \tilde{D} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$dx dy = |J| dr d\theta = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int \int_{\tilde{D}} e^{-r^2} r^{2p+2q-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\
 &= 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \\
 &= \Gamma(p+q)B(p, q)
 \end{aligned}$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \pi \\
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &> 0 \text{ より, } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

$$\text{また, } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt \text{ より, } \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$(5) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$x = t^2, \quad x = 2t dt, \quad dx = \frac{1}{2} dt, \quad x: 0 \rightarrow 1 \text{ のとき, } t: 0 \rightarrow 1$$

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{2p-2} (1-t^2)^{q-1} 2t dt = 2 \int_0^1 t^{2p-1} (1-t^2)^{q-1} dt$$

$$B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx = \int_0^1 \{x(1-x)\}^{p-1} dx$$

$$t = 2x - 1, \quad x = \frac{t+1}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} dt, \quad x: 0 \rightarrow 1 \text{ のとき, } t: -1 \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} B(p, p) &= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{p-1} dt = \frac{1}{2^{2p-1}} 2 \int_0^1 (1-t^2)^{p-1} dt = \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^1 (1-t^2)^{p-1} dt \\ &= \frac{1}{2^{2p-2}} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, p\right) = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right) \end{aligned}$$

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right) \text{ より,}$$

$$\frac{\Gamma(p)^2}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})$$

注意

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{p-1} (\beta-x)^{q-1} dx$$

$$x = (\beta-\alpha)t + \alpha, \quad dx = (\beta-\alpha)dt, \quad x: \alpha \rightarrow \beta \text{ のとき, } t: 0 \rightarrow 1$$

$$x - \alpha = (\beta - \alpha)t, \quad (\beta - x) = (\beta - \alpha)(1 - t)$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{p-1} (\beta-x)^{q-1} dx = (\beta-\alpha)^{p+q-1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = (\beta-\alpha)^{p+q-1} B(p, q)$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{p-1} (\beta-x)^{q-1} dx = (\beta-\alpha)^{p+q-1} B(p, q)$$

n 次元球の体積と表面積の公式の証明

$$(3) \quad V_n(r) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \text{ の証明}$$

数学的帰納法による.

$$n = 1 \text{ のとき, (左辺)} = V_1(r) = 2r \quad , \quad (\text{右辺}) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}} r^1}{1\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2r$$

$$n = k \text{ のとき, } V_k(a) = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}} a^k}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \text{ を仮定する.}$$

$$n = k + 1 \text{ のとき, } V_{k+1}(r) = \int \int \cdots \int_{D_{k+1}(r)} dx_1 dx_2 \cdots dx_k dx_{k+1}$$

$$D_{k+1}(r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2 \leq r^2\}$$

$$\begin{aligned} V_{k+1}(r) &= \int_{-r}^r \left(\int \cdots \int_{D_k(\sqrt{r^2 - x_{k+1}^2})} dx_1 dx_2 \cdots dx_k \right) dx_{k+1} \\ &= \int_{-r}^r \left(\frac{2\pi^{\frac{k}{2}} \left(\sqrt{r^2 - x_{k+1}^2} \right)^k}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \right) dx_{k+1} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^k dx \\ &= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-r}^r (x+r)^{\frac{k}{2}} (r-x)^{\frac{k}{2}} dx \\ &= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} (2r)^{\frac{k}{2}+1+\frac{k}{2}+1-1} B\left(\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1\right) \\ &= \frac{2^{k+2}\pi^{\frac{k}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)^2}{\Gamma(k+2)} r^{k+1} = \frac{2^{k+2}\pi^{\frac{k}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^2}{(k+1)k\Gamma(k)} r^{k+1} \\ &= \frac{2^k \pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{(k+1)\Gamma(k)} r^{k+1} \\ &\quad \text{倍数の公式 } \Gamma(k) = \frac{2^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \text{ より,} \\ &= \frac{2^k \pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{(k+1) \frac{2^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} r^{k+1} = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} r^{k+1} \end{aligned}$$

1.3.4 ベータ分布

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & (0 < x < 1) \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

parameter a, b をもつ ベータ分布 (beta distribution): $Be(a, b)$

$$\text{平均 } \mu = \frac{a}{a+b}, \quad \text{分散 } \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

問 28 ベータ分布の平均と分散が上記のようになることを示せ.

1.3.5 指数分布

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

parameter λ の 指数分布 (exponential distribution): $Ex(\lambda)$

$$\text{平均 } \mu = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{分散 } \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

指数分布の分布関数

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

問 29 指数分布の平均と分散が上記のようになることを示せ.

1.3.6 ワイブル分布

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \begin{cases} \frac{c}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{a}\right)^c\right\} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (a > 0, c > 0)$$

parameter (a, c) の ワイブル分布 (Weibull distribution): $We(a, c)$

$c = 1$ のときは, 指数分布 $Ex(\frac{1}{a})$

ワイブル分布の分布関数

$$F(x) = \int_0^x \frac{c}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^c\right\} dt = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{a}\right)^c\right\}$$

問 30 ワイブル分布の分布関数が上記のようになることを示せ.

1.3.7 ガンマ分布

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta}) & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ガンマ分布: $Ga(\alpha, \beta)$

平均 $\mu = \alpha\beta$, 分散 $\sigma^2 = \alpha\beta^2$

$\alpha = 1$ のときは, 指数分布 $Ex(\frac{1}{\beta})$

問 31 ガンマ分布について $\int_0^\infty f(x) dx = 1$ となることを示せ.

また, ガンマ分布の平均と分散が上記のようになることを示せ.

1.3.8 カイ 2 乗 (χ_n^2) 分布

以下では, 推定や検定に用いられる確率分布について考える.

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$: 互いに独立で標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う

$$X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2$$

の分布を 自由度 n のカイ 2 乗分布 といい, χ_n^2 で表す.

$$\text{確率密度関数: } f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

自由度 n のカイ 2 乗分布 χ_n^2 はガンマ分布 $Ga(\alpha, \beta)$ の $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = 2$ の場合となっている.
 $\chi_n^2 = Ga(\frac{n}{2}, 2)$

カイ 2 乗分布の確率密度関数が上記のようになる理由

カイ 2 乗分布の分布関数 $F(x)$ は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \int \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \int \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq x} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

極座標

$$x_1 = r\omega_1, x_2 = r\omega_2, \dots, x_n = r\omega_n$$

に変数変換をする.

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2 = 1$$

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n = r^{n-1} dr dS$$

ここで, dS は n 次元単位球面の面積要素を表す.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{S_n} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr dS = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{S_n} dS \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr \end{aligned}$$

$$f_n(x) = F'(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left(-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\right) (\sqrt{x})^{n-1} \{\sqrt{x}\}' = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$$

1.3.9 t -分布

X, Y : 互いに独立

X : 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う

Y : 自由度 n のカイ 2 乗分布 χ_n^2 に従う

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

の分布を 自由度 n の (スチューデントの) t 分布 といい, t_n で表す.

$$\text{確率密度関数: } f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$n = 1$ のときは,

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

となり, この分布を特に Cauchy 分布という.

問 32 自由度 1 の t 分布が上記の Cauchy 分布 $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ となることを示せ.

また, Cauchy 分布の分布関数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

を計算せよ.

カイ2乗分布の確率密度関数が上記のようになる理由

t 分布の分布関数 $F(t)$ は

$$F(t) = \int \int_{D_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dx dy$$

ここで,

$$D_t = \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty, \frac{x}{\sqrt{y/n}} \leq t\}$$

変数変換: $(x, y) \longleftrightarrow (s, u)$

$$s = \frac{x}{\sqrt{y/n}}, u = y \iff x = s\sqrt{\frac{u}{n}}, y = u$$

$$\widehat{D}_t = \{(s, u) \mid -\infty < s \leq t, 0 \leq u < \infty\}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{n}} & 0 \\ \frac{s}{2\sqrt{nu}} & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{u}{n}}, \quad dx dy = \sqrt{\frac{u}{n}} ds du$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \int_{\widehat{D}_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \int \int_{\widehat{D}_t} \exp\left(-\frac{us^2}{2n}\right) u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \sqrt{\frac{u}{n}} ds du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^t \left\{ \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-u \frac{s^2+n}{2n}\right\} du \right\} ds \end{aligned}$$

$$f(t) = F'(t) = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-u \frac{t^2+n}{2n}\right\} du$$

$$v = u \frac{t^2+n}{2n} \text{ とおく. } u = \frac{2nv}{t^2+n}, \quad du = \frac{2n}{t^2+n} dv, \quad u: 0 \rightarrow \infty \text{ のとき, } v: 0 \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2n}{t^2+n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^{\infty} v^{\frac{n-1}{2}} e^{-v} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2n}{t^2+n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

第2章 プログラミング

2.1 十進 BASIC の使い方について

2.1.1 インストール

- 1) 次のホームページより download する (Yahoo や Google などの検索ページにて「十進 BASIC」で検索してこのページにいてもよい)

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

- 2) download した『BASIC734.zip』(解凍ソフトが必要?) または『BASIC734setup.exe』をダブルクリックして指示に従う。(USB フラッシュメモリにインストールするとよい)
- 3) 『十進 BASIC』の起動は解凍された『BASIC.EXE』をダブルクリック

2.1.2 十進 BASIC の基本の基本

- 1) プログラムは通常、上から順に実行される。
プログラム実行の最後には「END」が必要
- 2) 文字列定数以外は英字の大文字小文字は区別されない(どちらを用いてもよい)
- 3) 変数名は英字に、英字、数字、または_を続けたものを用いる。

また、文字列変数 (文字列を代入するための変数) には末尾に「\$」をつける。

- 4) 代入文 LET_変数名=定数または式 (LET は必ず必要)
 INPUT_変数名
 INPUT_PROMPT_"メッセージ":変数名
- 5) 数値演算 足し算 + 引き算 - 掛け算 * 割り算 /
 巾乗 ^ 2⁵ は 2[^]5

演算のカッコは何重になっても丸カッコ () のみを用いる

- 6) 出力文 PRINT_定数または式
 (次に表示されるものは改行して表示される)
 PRINT_定数または式,
 (コンマで終われば、改行せずに間隔をあけて表示)
 PRINT_定数または式;
 (セミコロンで終われば、改行せずに間隔をあけずに表示)
 コンマやセミコロンで区切って、複数個表示することもできる。
- 7) 困ったときにはヘルプ機能で調べる

プログラム例 01

```
PRINT "兵庫県立大学"  
PRINT "経済学部"  
LET a=2  
LET b=5  
LET c$="University of Hyogo"  
LET d$="Kobe University of Commerce"  
PRINT a+b,a-b,a*b,a/b  
PRINT c$  
PRINT d$  
END
```

プログラム例 02

```
INPUT PROMPT "x=(x>0) ": x  
INPUT PROMPT "y=" : y  
PRINT "x+y=";x+y,"x-y=";x-y,"x^y=";x^y  
END
```

2.1.3 ループ (繰り返し)

(I) FOR ～ NEXT 文

```
FOR 変数=数値 1 TO 数値 2 [STEP 数値 3]  
  命令 1  
  命令 2  
  ...  
NEXT 変数
```

変数が数値 1 から数値 2 を越えるまで数値 3 の間隔で増加しながら、各命令の実行を繰り返す。(途中でループから抜け出すときは EXIT FOR)
『入れ子』になってもよい。

プログラム例 03

```
FOR x=1 TO 10  
  print x,"KOBE"  
NEXT x  
END
```


プログラム例 04(1 から 10 まで足すプログラム)

```

LET S=0
FOR x=1 TO 10
  LET S=S+x
NEXT x
PRINT S
END

```

問題 1 INPUT 文を用いて, 1 から n まで足すプログラムにプログラム例 04 を変更しなさい.

問題 2 上の問題 1 を変更追加して次の式を計算するプログラムを作りなさい.

$$(1) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$(3) \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$(4) \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

$$(5) \quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

問題 3 次の数列の漸化式を計算するプログラムを作りなさい.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

$$a_1 = 2$$

$a_2, a_3, \dots, a_{100}$ を表示させなさい.

(II) DO WHILE ～ LOOP 文 (前判定反復)

DO WHILE 条件

命令 1

命令 2

...

LOOP

条件が満たされている間は各命令を繰り返す. (途中でループから抜け出すときは EXIT DO)
ループに入る前に条件をチェックするので, 条件が真でなければ 1 回も実行されない.

条件について

- (1) $\neq$ は『<>』 または『><』
- (2) $\geq$ は『>=』 または『=>』
- (3) $\leq$ は『<=』 または『=<』
- (4) 複数の条件は『AND』, 『OR』 で結ぶ.
- (5) 否定の条件は『NOT』.

プログラム例 05(1 から 10 まで足すプログラム)

```
LET S=0
LET X=1
DO WHILE X<=10
  LET S=S+X
  LET X=X+1
LOOP
PRINT S
END
```

(III) DO ～ LOOP WHILE 文 (後判定反復)

```
DO
  命令 1
  ...
LOOP WHILE 条件
```

条件が満たされている間は各命令を繰り返す. (途中でループから抜け出すときはEXIT DO)
ループに入った後で条件をチェックするので, 条件が真でなくても 1 回は実行される.

(IV) DO ～ LOOP UNTIL 文 (後判定反復)

```
DO
  命令 1
  ...
LOOP UNTIL 条件
```

条件が真になるまで (偽の間は) 各命令を繰り返す.

(V) DO UNTIL ~ LOOP 文 (前判定反復)

DO UNTIL 条件

命令 1

...

LOOP

条件が真になるまで (偽の間は) 各命令を繰り返す.

プログラム例 06(自然数の割り算を引き算だけで行うプログラム)

INPUT PROMPT "割られる数 x=" : x

INPUT PROMPT "割る数 y=" : y

LET q=0

DO UNTIL x<y

LET x=x-y

LET q=q+1

LOOP

PRINT "商=" ; q

PRINT "余り=" ; x

END

DO UNTIL x<y の代わりに, DO WHILE x>=y でもよい.

問題 4 ある国の人口は現在 1000 万人とします. この国では 1 年に人口は 3% ずつ増加します. 1 年後, 2 年後, 3 年後, ... の人口が何万人になるかを人口が 2000 万人を超えるまで計算するプログラムを作りなさい. (DO~LOOP WHILE を用いなさい)

組み込み関数について

(1) ABS(x) x の絶対値 $|x|$

(2) SQR(x) x の非負の平方根 $\sqrt{x}$

(3) INT(x) x を超えない最大の整数 $[x]$ (Gauss の記号)

(4) $\sin x \rightarrow \text{SIN}(x)$ $\cos x \rightarrow \text{COS}(x)$ $\tan x \rightarrow \text{TAN}(x)$

$\sin^{-1} x \rightarrow \text{ASIN}(x)$ $\cos^{-1} x \rightarrow \text{ACOS}(x)$ $\tan^{-1} x \rightarrow \text{ATN}(x)$

(5) $e^x \rightarrow \text{EXP}(x)$ $\log_e x \rightarrow \text{LOG}(x)$ $\log_{10} x \rightarrow \text{LOG10}(x)$

(6) RND 関数 $0 \leq \text{RND} < 1$ となる一様乱数を与える.

最初に異なる乱数からはじめるためには, 予め RANDOMIZE 文が必要.

問題 5 問題 3 は $\sqrt{2}$ を近似するプログラムですが、誤差が 10^{-10} より小さくなるまで計算させるプログラムを作りなさい。(DO~LOOP~WHILE を用いなさい)

$\sqrt{2}$ は $\text{SQR}(2)$, $a_n > \sqrt{2}$ が分かっているので、誤差は $a_n - \sqrt{2}$ である。また 10^{-10} は 10^{-10} とする。

2.1.4 条件分岐

(I) 単純 IF 文 (1 行で記述)

IF 条件 THEN 命令

条件が真であれば命令を実行する。条件が偽であれば命令は実行されず次の行へ行く。

IF 条件 THEN 命令 1 ELSE 命令 2

条件が真であれば命令 1 を実行し、条件が偽であれば命令 2 を実行する。

(II) IF ~ THEN ~ END IF 文 (複数行で記述)

IF 条件 THEN

命令 1

命令 2

...

END IF

条件が真であれば各命令を実行する。条件が偽であれば命令は実行されず END IF の次の行へ行く

(III) IF ~ THEN ~ ELSE ~ END IF 文 (複数行で記述)

IF 条件 THEN

命令 1

ELSE

命令 3

END IF

条件が真であれば命令 1 を実行する。条件が偽であれば命令 3 を実行する。

(IV) ELSEIF

```
IF 条件 1 THEN
  命令 1
ELSEIF 条件 2 THEN
  命令 2
ELSE
  命令 3
ENDIF
```

条件 1 が真であれば命令 1 を実行する。条件 1 が偽で条件 2 が真であれば命令 2 を実行する。条件 1 も条件 2 も偽であれば命令 3 を実行する。

プログラム例 07(1 次方程式 $ax = b$ の解)

```
INPUT PROMPT "a=" : a
INPUT PROMPT "b=" : b
IF a <> 0 then
  LET x = b / a
  PRINT "x=" ; x
ELSEIF b = 0 THEN
  PRINT "不定 (無数の解)"
ELSE
  PRINT "解なし"
ENDIF
END
```

プログラム例 08(数当てゲーム)

```
RANDOMIZE
LET X = INT(RND * 10) + 1
DO
  INPUT Y
LOOP WHILE X <> Y
PRINT "当たり"
END
```

問題6 上の数当てゲームのプログラムを次のように変更しなさい。

- (1) 1~1000 の整数を当てるプログラムに変更しなさい。
- (2) $X > Y$ のときは「もっと大きい」、 $X < Y$ のときは「もっと小さい」と表示させるようにしなさい。
- (3) 当たったときに何回目で当たったかを表示させなさい。

(V) 無限ループとループからの脱出

DO

□□□

LOOP

のように WHILE や UNTIL がなくても、DO□~□LOOP を用いてよいが、このままでは、繰り返しが無制限回になってしまう。あるいは、WHILE や UNTIL のある DO□~□LOOP 文や FOR□~□NEXT 文においても途中でループを抜け出したい場合がある。このような場合には、EXIT□DO や EXIT□FOR を用いて、ループを抜け出すことが出来る。

(VI) 多重ループ

FOR□~□NEXT 文や DO□~□LOOP 文は2重、3重に用いることが出来る。用い方については後で具体例で示すことにするが、EXIT□FOR や EXIT□DO を用いてループから抜け出せるのは、すぐ外のループにしか抜け出せない。もっと外のループに抜け出すには GOTO 文を用いる。GOTO 文は余り使わない方がよい(=分かりやすい)とされている。

GOTO□行番号 : プログラムの実行を指定された行番号の行に移動する。

行番号は付けたい行の先頭に自然数を用い、下の行ほど大きい番号を付けなければならない。行番号の直後には半角のスペースが必要である。

問題7 次の各問題に答えるプログラムを作成しなさい。

- (1) ある年の現在の人口を100万人とする。毎年人口が3% ずつ増えていくと150万人を突破するのは何年後か？
- (2) 毎月、月初めに10000万円ずつ積み立てる。年利3% の利息がつき、月単位の複利で計算されるとする。5年後(60ヵ月後)の元利合計はどれだけになるか？
- (3) 毎月、月初めに10000万円ずつ積み立てる。年利3% の利息がつき、月単位の複利で計算されるとする。元利合計が100万円に到達するのは何ヵ月後か？
- (4) 銀行から車を購入するために100万円を年利10% で借りました。借りた1ヵ月後から毎月2万円ずつ返済されていきます。借りている利息は月単位の複利で計算されます。返済が完了するのは何ヵ月後になるか？

2.1.5 グラフィックについて

(I) 座標系の設定

SET_WINDOW 左端座標, 右端座標, 下端座標, 上端座標

(II) 点を描く

PLOT_POINTS: x 座標, y 座標

予め, 打つ点のスタイルを次の命令で定めておく.

SET_POINT_STYLE 数値式

マークの形 (point style) を設定する.

1 . 2 + 3 * 4 ○ 5 ×

(III) 線を描く

PLOT_LINES: x1, y1; x2, y2

(x_1, y_1) から (x_2, y_2) までを線分で結ぶ.

線の色やスタイルを指定したい場合は次の命令で行う.

SET_LINE_COLOR 数値式

色は 0 から 255 までが利用でき, あらかじめ次のように割り当てられている.

0 白, 1 黒, 2 青, 3 緑, 4 赤, 5 水色, 6 黄色, 7 赤紫, 8 灰色, 9 濃い青,
10 濃い緑, 11 青緑, 12 えび茶, 13 オリーブ色, 14 濃い紫, 15 銀色, ...

SET_LINE_STYLE 数値式

線の種類は, 1 実線, 2 破線, 3 点線, 4 一点鎖線

(IV) 円を描く

DRAW_circle (現在の line color で原点を中心とする半径 1 の円を描く)

点 (x, y) を中心とする半径 r の円を描きたいときは,

DRAW_circle WITH_SCALE(r)*SHIFT(x,y)

(V) 座標軸や格子を描く

DRAW_AXES (x 軸と y 軸を描く)

DRAW_GRID (x 軸方向 間隔 1, y 軸方向 間隔 1 の格子を描く)

(VI) 画面消去

CLEAR

(VII) 色を塗る

FLOOD_x,y (点 (x, y) を始点として点 (x, y) と同色でつながる領域を現在の area color で塗りつぶす.)

PAINT_x,y (点 (x, y) を始点として line color の点を境界とする領域を現在の area color で塗りつぶす)

塗りつぶす色の色の設定は

SET_WINDOW_COLOR_数値式

プログラム例 11(グラフィック)

```
SET_WINDOW_-3,3,-3,3
PLOT_LINES:-2,-2;2,-2;2,2;-2,2;-2,-2
PLOT_LINES:-2,-2;2,2
PLOT_LINES:-2,2;2,-2
DRAW_circle_WITH_SCALE(2)
PLOT_POINTS:0,2.5
SET_WINDOW_COLOR_6
paint_1,0
END
```

プログラム例 12(2重ループ)

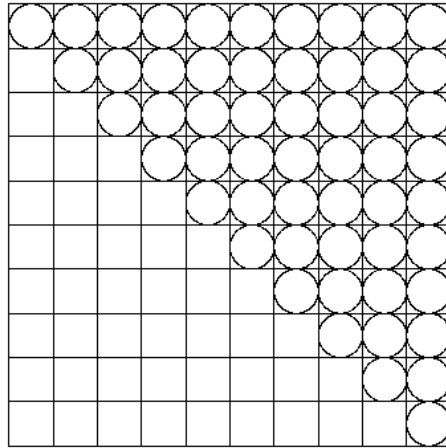
```
SET_WINDOW_-3,3,-3,3
PLOT_LINES:-2,-2;2,-2;2,2;-2,2;-2,-2
FOR_x=-2 TO 2 STEP 0.4
  PLOT_LINES:x,-2;x,2
NEXT_x
FOR_y=-2 TO 2 STEP 0.4
  PLOT_LINES:-2,y;2,y
NEXT_y
FOR_x=-2+0.2 TO 2 STEP 0.4
  FOR_y=-2+0.2 TO 2 STEP 0.4
    DRAW_circle_WITH_SCALE(0.2)*SHIFT(x,y)
  NEXT_y
NEXT_x
END
```

問題 8 プログラム例 12 を変更して次のようなプログラムを作りなさい。

- (1) 100 個の小円を黄色で塗りつぶしなさい。
- (2) 100 個の小円をランダムな色 (色指標 0~255) で塗りつぶしなさい。
- (3) 100 個の小円を色指標 1~100 の色が順番に現れるように塗りつぶしなさい。
- (4) プログラム例 12 の 6 行目を次のように変更しなさい。

FOR y=-2+0.2 TO 2 STEP 0.4 を FOR y=-2+0.2 TO x STEP 0.4

- (5) 次図のような 55 個の小円を描くプログラムを作りなさい.



- (6) (5) で描いた 55 個の小円をランダムな色 (色指標 0~255) で塗りつぶしなさい.

2.2 いろいろな曲線

2.2.1 $y = f(x)$ の形のグラフ

平行移動と伸縮

$y = f(x)$ のグラフを

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = f(x - p) + q$

原点を中心に x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍すると $y = bf(\frac{x}{a})$

$f(x, y) = 0$ のグラフを

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると $f(x - p, y - q) = 0$

原点を中心に x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍すると $f(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = 0$

関数 $y = f(x)$ のグラフを描くプログラム

プログラム例 13($y = x^2$ ($-3 \leq x \leq 3$) の graph)

```
SET WINDOW -3, 3, -1, 5
DRAW AXES
DEF f(x)=x^2
LET h=0.1
FOR x=-5 TO 5-h STEP h
  PLOT LINES: x, f(x); x+h, f(x+h)
NEXT x
END
```

十進 BASIC の追加説明 1

☆関数の定義 1

DEF 関数名 (変数)=変数の数式

☆ PLOT LINES 文の補足

PLOT LINES: x1, y1;

(終りがセミコロンで終わるときは紙の上にペンを置いたままの状態)

次の PLOT LINES の点までを線分で結ぶ

PLOT LINES: x1, y1

(終りがセミコロンで終わらないときは紙の上からペンを離した状態)

PLOT LINES

(コロン以下がないときは, 単にペンを紙から離す)

プログラム例 14($y = \frac{1}{x}$ ($-5 \leq x \leq 5$) の graph)

```

SET WINDOW -5,5,-5,5
DRAW AXES
DEF f(x)=1/x
LET h=0.1
FOR x=-5 TO 5-h STEP h
  PLOT LINES: x, f(x); x+h, f(x+h)
NEXT x
END

```

プログラム例 14 は $x = 0$ のとき、0 が分母にくるためエラーが起こる。このようなエラーが起こるときは次のようなエラー処理を行うことによってエラーを回避できる。

プログラム例 14-2($y = \frac{1}{x}$ ($-5 \leq x \leq 5$) の graph)

```

SET WINDOW -5,5,-5,5
DRAW AXES
DEF f(x)=1/x
LET h=0.1
FOR x=-5 TO 5-h STEP h
  WHEN EXCEPTION IN
    PLOT LINES: x, f(x); x+h, f(x+h)
  USE
    PLOT LINES
  END WHEN
NEXT x
END

```

十進 BASIC の追加説明 2

☆エラー処理

```

  WHEN EXCEPTION IN
    命令 1
  USE
    命令 2
  END WHEN

```

命令 1 の中でエラーが生じれば命令 1 を行わず、命令 2 を行う。

問題9 次の関数のグラフがどのようなになるか数学的に考えよ．また，そのグラフを描くプログラムを作成し，実行せよ．(x の範囲には定義されない部分も含まれている．なるべく縦と横の縮尺を同じにせよ)．また， $y = f(x)$ は青色で， $y = g(x)$ は緑色で， $y = h(x)$ は赤色で描きなさい．

$$(1) \quad y = f(x) = x^3 - x \quad , \quad y = g(x) = x^4 - 2x^2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(2) \quad y = f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(3) \quad y = f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , \quad y = g(x) = x - \frac{1}{x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(4) \quad y = f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 3) \quad (\sqrt{x} = \text{SQR}(x))$$

$$(5) \quad y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad , \quad y = g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(6) \quad y = f(x) = \sin x \quad , \quad y = g(x) = \cos x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(\sin x = \text{SIN}(x) \quad , \quad \cos x = \text{COS}(x))$$

$$(7) \quad y = f(x) = \cos x + \frac{1}{10} \sin 40x \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(8) \quad y = f(x) = x \cos \frac{1}{x} \quad (-0.1 \leq x \leq 0.1)$$

$$(9) \quad y = f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(10) \quad y = f(x) = f(x) = \sin 11x + \sin 12x \quad (-10 \leq x \leq 10)$$

$$(11) \quad y = f(x) = \tan^{-1} x \quad , \quad y = g(x) = \tan x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(\tan x = \text{TAN}(x) \quad , \quad \tan^{-1} x = \text{ATN}(x))$$

$$(12) \quad y = f(x) = 2^x \quad , \quad y = g(x) = 2^{-x} \quad , \quad y = h(x) = \log_2 x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(\log_a x = \text{LOG}(x)/\text{LOG}(a) \text{ 特に, } \log_2 x = \text{LOG2}(x) \quad , \quad \log_{10} x = \text{LOG10}(x))$$

$$(13) \quad y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad y = g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = h(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(e^x = \text{EXP}(x) \quad , \quad \text{特に, } \cosh x = \text{COSH}(x) \quad , \quad \sinh x = \text{SINH}(x) \quad , \quad \tanh x = \text{TANH}(x))$$

$$(14) \quad y = f(x) = [x] \quad , \quad y = g(x) = x - [x] \quad (-5 \leq x \leq 5) \quad ([x] = \text{INT}(x))$$

2.2.2 曲線の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t: \alpha \longrightarrow \beta$$

t が α から β まで変化するとき, $(f(t), g(t))$ を座標とする点 P は xy 平面上を動き, その軌跡は曲線となる. 上のような表示をこの曲線の 媒介変数表示 あるいは para-meter 表示 といい, このときの変数 t を 媒介変数 (para-meter) という. また, 点 $(f(\alpha), g(\alpha))$ を 始点, 点 $(f(\beta), g(\beta))$ を 終点 という.

例 1(cycloid)

半径 a の円板をある直線に沿って, 滑らさずに回転させるとき, 円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を サイクロイド (cycloid) という. サイクロイドは次のように媒介変数表示される.

$$\begin{cases} x = a\theta - a \sin \theta \\ y = a - a \cos \theta \end{cases} \quad \theta: 0 \longrightarrow \beta$$

プログラム例 15(cycloid)

```
SET WINDOW -1, 7, -1, 7
DRAW AXES
DEF f(t)=t-SIN(t)
DEF g(t)=1-COS(t)
LET h=0.01
FOR t=0 TO 8-h STEP h
  PLOT LINES: f(t), g(t); f(t+h), g(t+h)
NEXT t
END
```

例 2(epicycloid)

半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って外側を, 滑らさずに回転させるとき, 円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 外サイクロイド (epicycloid) という. これは次のように媒介変数表示される.

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b} \theta \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta: 0 \longrightarrow \beta$$

例 3(hypocycloid)

半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って内側を、滑らずに回転させるとき、円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 内サイクロイド (hypocycloid) という。これは次のように媒介変数表示される。(ただし、 $b < a$)

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b} \theta \\ y = (a - b) \sin \theta - b \sin \frac{a-b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow \beta$$

例 4(リサージュ (Lissajous) 曲線)

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad t : 0 \longrightarrow \beta$$

あるいは

$$\begin{cases} x = A \cos(at) \\ y = B \sin(bt + \delta) \end{cases} \quad t : 0 \longrightarrow \beta$$

例 5(楕円と双曲線)

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

あるいは

$$\begin{cases} x = a \cosh t = a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \sinh t = b \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t : -\infty \longrightarrow \infty$$

問題 10 サイクロイド、エピサイクロイド、ハイポサイクロイドはいずれも、円周上の点の軌跡であったが、円周上にない場合 (円の内部の点や外部の点の軌跡の場合) にはこれらをそれぞれ、トロコイド (trochoid)、エピトロコイド (epitrochoid)、ハイポトロコイド (hypotrochoid) という。これらの曲線を媒介変数表示し、それらを描くプログラムを作成して、コンピュータに描かせよ。

問題 11 円： $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$ に糸を巻き付け、それを引っ張りながら解いていくとき、糸の端の点の描く曲線を媒介変数表示し、それを描くプログラムを作成して、コンピュータに描かせよ。ただし、糸の端は、最初は点 $(a, 0)$ にあるとせよ。

2.2.3 極座標と曲線

平面上の点 P の位置を表すのに、今までは xy -座標を用いてきた。この他に次のような表し方もある。平面上の定点 O と O から引いた半直線 OX を定めておく。

$$OP = r \quad , \quad \angle XOP = \theta$$

とするとき、点 P の位置を (r, θ) とする。このような座標を 極座標 という。 θ は時計と反対周りに一般角を考え、 r が負の値の場合には、

$$OP' = |r| \quad , \quad \angle XOP' = \theta$$

とするとき、点 P は P' と原点 O に関して対称な位置を表すことにする。

r と θ の関係式 $f(r, \theta) = 0$ は極座標において曲線を表す。この関係式を 極方程式 という。

また、 OX を x 軸とし、 O を通り、それに直交する直線を y 軸とすると、2つの座標の間には次の関係がある。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \frac{\pi}{2} & (x = 0, y > 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{2} & (x = 0, y < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

例 6(直線)

原点を通る直線： $\theta = \alpha$ (α : 定数)

極座標が (r_0, α) で表される点 A を通り OA に直交する直線： $r \cos(\theta - \alpha) = r_0$

例 7(円)

原点を中心とし、半径 r_0 の円： $r = r_0$ (r_0 : 定数)

極座標が (r_1, α) を中心とし、半径 r_0 の円： $r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \alpha) - r_0^2 = 0$

例 8(アルキメデスの螺線 (らせん))

$$r = a\theta \quad (a > 0)$$

例 9(等角螺線, 対数螺線)

$$r = a^{\theta} \quad (a > 1)$$

例 10(正葉線)

$$r = a \sin n\theta \quad (a > 0, n \text{ は自然数})$$

例 11(Pascal のリマソン (limaçon=かたつむり))

$$r = a \cos \theta + b \quad (a > 0, b > 0)$$

$a = b$ のときは カージオイド (cardioid) という.

問題 12 例 8(アルキメデスの螺線) と例 9(対数螺線) のグラフを手で描いてみなさい.

問題 13 例 10(正葉線) のグラフを $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に手で描いてみなさい.

問題 14 例 11(Pascal のリマソン) のグラフを $a > b$, $a = b$, $b = 2a$ の各場合に手で描いてみなさい.

$r = f(\theta)$ のように書くことのできる極方程式の定める曲線は, 次のように媒介変数表示もできる.

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

問題 15 問題 4～問題 6 の各問題の曲線をコンピュータに描かせるプログラムを作成し, コンピュータに描かせなさい.

2.3 数値計算

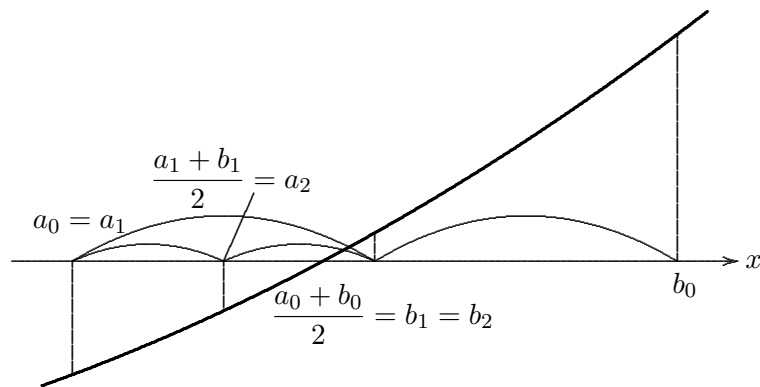
2.3.1 方程式の解の近似

方程式

$$f(x) = 0$$

の解 α を近似する方法について考える.

2 分法 (区間縮小法)



有界閉区間 $[a, b]$ において, $f(x)$ は次の条件を満たしていると仮定する.

- $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で連続
- 両端における $f(x)$ の値 $f(a)$ の符号と $f(b)$ における符号は異符号とする.
すなわち, $f(a)f(b) < 0$
- $f(x) = 0$ の解は有界閉区間 $[a, b]$ において唯一つしかないとする.

このとき, 以下の手順で解 α を近似する.

今, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (逆の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $a_0 = a$, $b_0 = b$ とする.

(1) a_0 と b_0 の中点 $\frac{a_0 + b_0}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_0 + b_0}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) < 0$ のときは, $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = b_0$ とする.

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) > 0$ のときは, $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ とする.

このとき, α は a_1 と b_1 の間に存在する.

(2) a_1 と b_1 の中点 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_1 + b_1}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < 0$ のときは, $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = b_1$ とする.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) > 0$ のときは, $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ とする.

このとき, α は a_2 と b_2 の間に存在する.

.....

(k) a_{k-1} と b_{k-1} の中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) < 0$ のときは, $a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, $b_k = b_{k-1}$ とする.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) > 0$ のときは, $a_k = a_{k-1}$, $b_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ とする.

このとき, α は a_k と b_k の間に存在する.

$b = k - a_k$ が要求された精度 (誤差の限界) より, 小さくなれば, 中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ を近似解として採用する. 誤差 E は

$$E \leq b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

と評価できるが, 能率はよくない.

n 等分法

2 分法では区間を 2 等分ずつ行っていたが, ここでは n 等分して考える.

今, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (逆の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $a_0 = a$, $b_0 = b$ とする.

(1) 区間 $[a_0, b_0]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_1 , 右の点を b_1 とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

(2) 区間 $[a_1, b_1]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_2 , 右の点を b_2 とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

.....

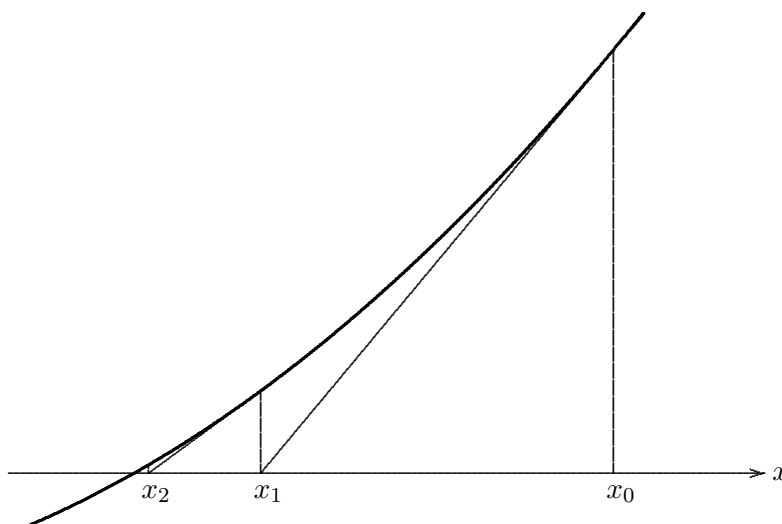
(k) 区間 $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_k , 右の点を b_k とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

$b = b_k - a_k$ が要求された精度 (誤差の限界) より, 小さくなれば, 中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ を近似解として採用する. 誤差 E は

$$E \leq b_k - a_k = \frac{1}{n^k}(b - a)$$

と評価できる. 能率はは 2 分法と比べてどうだろうか?

Newton 法



有界閉区間 $[a, b]$ において, $f(x)$ は次の条件を満たしていると仮定する.

- $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で 2 回微分可能で $f''(x)$ は定符号
- 両端における $f(x)$ の値 $f(a)$ の符号と $f(b)$ における符号は異符号とする.

すなわち, $f(a)f(b) < 0$

このとき, a と b の間にはただ一つの解を持つ. 以下の手順で解 α を近似する.

今, $f''(x) > 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (他の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $x_0 = b$ とする.

(1) x_0 における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ を引き, x 軸と交わった交点を x_1 とする. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(2) 同様に, x_1 における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ を引き,

x 軸と交わった交点を x_2 とする. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

.....

(k) x_{k-1} における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$ を引き,
 x 軸と交わった交点を x_k とする. $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

以上まとめると,

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\ x_0 = b \text{ (初期値) または, } x_0 = a \end{cases}$$

初期値 x_0 を a にとるか b にとるかは, $f(a)$ あるいは $f(b)$ が $f''(x)$ と同符号になるように選ぶとよい.

誤差の評価を行うのに, $f(x)$ を $x = x_{k-1}$ において Taylor の定理を適用すると ($n = 2$)

$$f(\alpha) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(\alpha - x_{k-1}) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - x_{k-1})^2$$

$$E_k = |x_k - \alpha| = \left| x_{k-1} - \alpha - \frac{f(x_{k-1}) - f(\alpha)}{f'(x_{k-1})} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c)}{f'(x_{k-1})} \right| |x_{k-1} - \alpha|^2$$

ここで, $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ とおけば,

$$E_k \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_{k-1} - \alpha|^2 = \frac{M_2}{2m_1} E_{k-1}^2$$

このような収束を **2次収束** といい, 非常によい近似になっている. これに対して, 2分法や n 等分法は $E_k \leq cE_{k-1}$ の評価なので, **1次収束** となっている.

割線法 (セカント法)

Newton 法では, 接線を用いたがここでは接線の代わりに曲線上の 2 点を結ぶ直線 (割線) を用いてみよう.

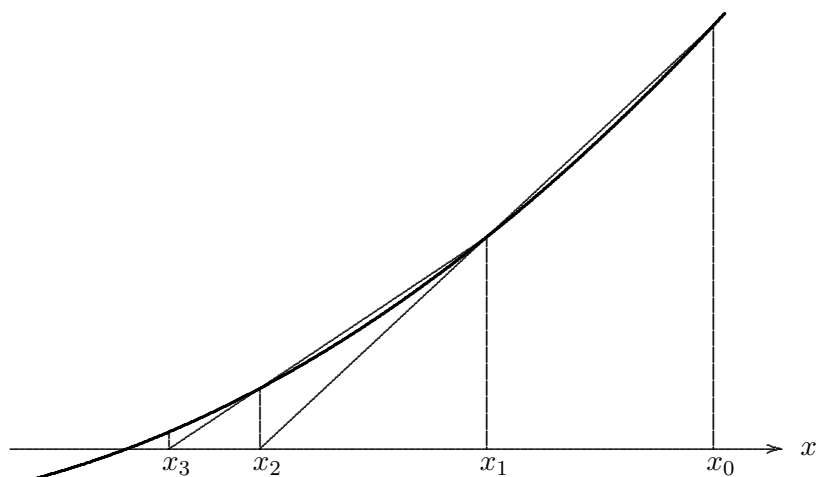
2 点 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

となるので, x 軸との交点は $x = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ となる. これを x_{k+1} とおく.

Newton 法と同様に次の式が得られる.

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ \text{初期値 } x_0, x_1 \end{cases}$$



Newton 法と同様の仮定をおけば, 2つの初期値 x_0, x_1 を $f(x)$ の値が $f''(x)$ の符号と同一符号になる 2 点を選べばよい. この割線法は Newton 法に比べてその能率は若干悪くなる.

問題 5 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ の解を近似するプログラムを, 2 分法, 10 等分法, Newton の方法, 割線法のそれぞれについて作成せよ.

2.3.2 定積分の近似

ここでは, $\int_a^b f(x) dx$ の近似値を求める方法について考えてみよう.

区分求積法 (短冊近似)

定積分の定義は, 閉区間 $[a, b]$ の分割 Δ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と n 個の小区間 $[x_{k-1}, x_k] (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ から, 点 ξ_k を選び, Riemann 和

$$S(\Delta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を考え, 分割 Δ の最大幅 $|\Delta|$ を 0 に限りなく近づけた時の極限

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \{\xi_k\})$$

が分割の仕方 Δ や小区間からの点の選び方 $\{\xi_k\}$ に関係なくある一定の値に近づくとき, その値を, $\int_a^b f(x) dx$ と定義する.

今, 分割 Δ を n 等分にとり, 小区間からの点の選び方 $\{\xi_k\}$ を小区間の左端の点 x_{k-1} を選ぶと,

$$x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k, \quad \xi_k = x_{k-1} = a + \frac{(b-a)}{n}(k-1)$$

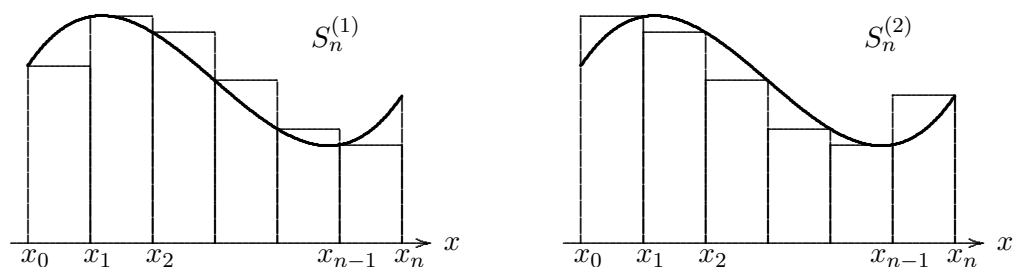
となり, その場合の Riemann 和 $S_n^{(1)}$ は

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)}{n}(k-1)\right) \frac{b-a}{n}$$

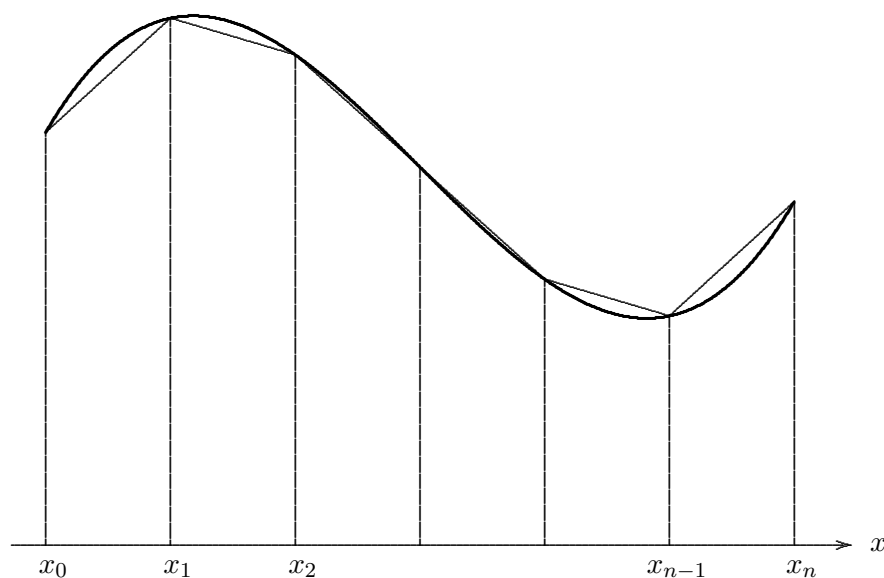
$\{\xi_k\}$ を小区間の右端の点 x_k を選ぶと, その場合の Riemann 和 $S_n^{(2)}$ は

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)}{n}k\right) \frac{b-a}{n}$$

定積分の定義から, $\int_a^b f(x) dx$ の近似値として, n を大きくとって, $S_n^{(1)}$ や $S_n^{(2)}$ を採用することができる.



台形近似法



区分求積法 (短冊近似法) では, 各小区間の定積分を長方形で近似したが, ここでは, (x_{k-1}, y_{k-1}) と (x_k, y_k) を結ぶ台形で近似する. これは, 結果的に, $y = f(x)$ の曲線を折れ線で近似することと同じになる. そうすると, 近似公式は,

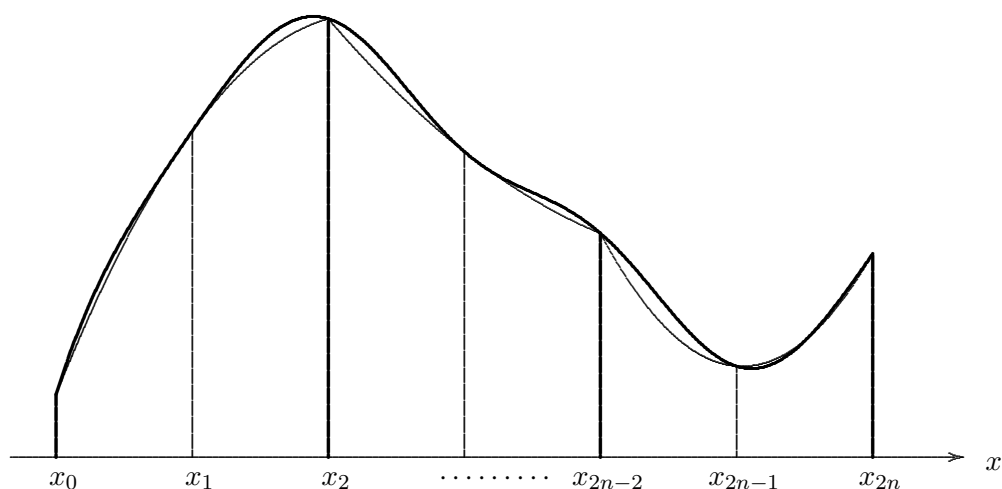
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \frac{b-a}{n} + \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{2n} \{y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\} \end{aligned}$$

となる. これを **台形近似法** あるいは **台形公式** といい, 区分求積法 (短冊近似法) の $S_n^{(1)}$ と $S_n^{(2)}$ の平均 $\frac{S_n^{(1)} + S_n^{(2)}}{2}$ に等しい.

台形近似法の誤差 E については次のような評価が得られる.

$$E \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2} \quad \text{ここで, } M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \text{ とする.}$$

Simpson の公式



区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分する. 分点を $x_k = a + \frac{b-a}{2n}k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$) とし, 各分点における y の値を $y_k = f(x_k)$ とおく.

n 個の小区間 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ において, 3 点 (x_{2k-2}, y_{2k-2}) , (x_{2k-1}, y_{2k-1}) , (x_{2k}, y_{2k}) を通る 2 次曲線で $f(x)$ を近似する.

$g(x)$ が 2 次関数のとき,

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right) \quad \text{となるので, これを各小}$$

区間に適用すると ($a = x_{2k-2}, b = x_{2k}$),

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} g(x) dx = \frac{b-a}{6n} (y_{2k-2} + y_{2k} + 4y_{2k-1})$$

これから, 近似公式

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \\ &\doteq \int_{x_0}^{x_2} g(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} g(x) dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} g(x) dx \\ &\doteq \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + \\ &\quad + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})) \end{aligned}$$

が得られる. これを **Simpson の公式** という.

Simpson の公式の誤差 E の評価については

$$E \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

n を大きくするとき台形公式では誤差は $\frac{1}{n^2}$ の order なのに対して, Simpson の公式では誤差が $\frac{1}{n^4}$ の order となっている. (これだけ, Simpson の公式がよい近似になっている)

問題 6 定積分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ の値を近似するプログラムを, 区分求積法, 台形公式,

Simpson の公式のそれぞれについて作成せよ.

2.4 差分 (定差) 方程式

2.4.1 差分 (定差) 方程式の例

例 7 (人口の変化) ある国の人口は毎年 a % の割合で増えていきます. n 年後の人口を P_n とするとき, P_{n+1} を P_n で表わしなさい.

例 8 (Fibonacci の数列) 各項はその前の項と前の前の項の和になっていて, 最初の項 a_0 は 0 であり 8 その次の項 a_1 が 1 である数列を Fibonacci の数列という. すなわち,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

例 9 平面上に n 本の直線があり, どの 2 本の直線も平行でなく, どの 3 本の直線も 1 点では交わらないとき, これら n 本の直線により分割される領域の個数を a_n とする. a_{n+1} を a_n で表わしなさい.

例 10 (ロジスティック増殖) ある池にメダカがすんでいます. メダカはたくさんの子供を生むのですが一年後までには相当数の子供が死んでしまいます. また, この池もそんなに広いわけではないのでメダカの数 C 匹を超えると次の年には減ってしまいます. このような理由で現在のメダカの数 p とすると, 次の年のメダカ数は前の年より $a(1-p/C)p$ 万匹増える (ただし, p が C を超えると減る) とします (a はある正の定数). n 年後にはメダカの数はどうなるでしょうか. n 年後のメダカ数を p_n 匹として p_{n+1} を p_n で表わしなさい.

例 11 (携帯電話の普及) 日本の人口を N 人とします. その内で, 現在携帯電話を所有している人の数を x_0 とします. 携帯電話の普及は現在携帯電話を所有している人の数に比例し, また現在携帯電話を所有していない人の数にも比例するとします. このことから, 次のような漸化式が成り立ちます.

$$x_{n+1} - x_n = kx_n(N - x_n)$$

例 12 (木村先生の線形代数より — ある森の物語) ある森にウサギとキツネが住んでいます. ウサギは, 一年間に a 倍に増えるのですがその間に何匹かはキツネに食べられてしまいます. 一匹のキツネは平均して, 一年に b 匹のウサギを食べます. キツネについては, 年をとったり, 食料難のために, 毎年, c % のキツネが死んでいきます. しかし, 子ギツネも生まれます. 生まれる子ギツネの数は, 前の年のウサギの数の d % になります. それは母ギツネがウサギの数を見て子供を作るからです. ウサギの数とキツネの数は n 年後にはどうなるでしょうか. n 年後のウサギの数を R_n , キツネの数を F_n とすると

き, R_{n+1} と F_{n+1} を R_n , F_n を用いて表わしなさい. また, この式を行列の形

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

で書きなさい。

例 13(ある森の物語の変形) ある森にウサギとキツネが住んでいます。前の年のウサギの数を R , キツネの数を F とすると, 次の年のウサギの数は病気で死んだり生まれたりして $(1 + A(1 - R/C))R$ 匹になるのですが, そのほかに キツネに DRF 匹食べられてしまいます。また, 次の年のキツネの数は $QDRF$ 匹になります。ウサギの数とキツネの数は n 年後にはどうなるでしょうか。 n 年後のウサギの数を R_n , キツネの数を F_n とするとき, R_{n+1} と F_{n+1} を R_n , F_n を用いて表わしなさい。

(ここで, A :増殖率, C :容量, D :捕食率, Q :転換率 といい, いずれも正の定数とする)

例 14 アユの寿命は3年とします。ことし生まれた赤ちゃんアユのうち, 一年後まで生き残れるアユは5%とします。また, 満1歳のアユが次の年まで生き残れるのは半分とします。満2歳のアユが次の年まで生き残れるのも半分とします。満3歳のアユは次の年までにはすべて死んでしまいます。また, 満1歳アユは毎年一匹あたり平均10匹の赤ちゃんアユを産み, 満2歳アユは毎年一匹あたり20匹の赤ちゃんアユを産むとします。満3歳のアユはもう子供を産みません。(もっと沢山生むのですが大半は孵化しなかったり, 大きな魚などに食べられてしまう)。いま, 一匹もアユの住んでいない湖に赤ちゃんアユを100万匹放流すれば, n 年後の各年令のアユの個数はそれぞれ何匹になるでしょうか。 n 年後の赤ちゃんアユの数を P_n^0 , 満1歳アユの数を P_n^1 , 満2歳アユの数を P_n^2 , 満3歳アユの数を P_n^3 として漸化式(差分方程式)を作りなさい。また, 例5のようにこれを行列の形で書きなさい。

例 15(ローン返済 2004年兵庫県立大学経済・経営学部前期入試問題の変形) A氏はある年にB銀行から年利 r で a 円を借りることにした。1年後から毎年借りた日と同じ日に一定額 b 円を返済して, 20回で返済が終わるようにしたい。 $(n+1)$ 年後の返済直後のローン残高 x_{n+1} を a , b , x_n を用いて表わせ。ただし, 利息の計算は1年ごとの複利計算とする。また, 20回で返済が終わるようにするには b をどのように定めればよいか。

例 16(Markov chain 天候の確率) 毎日の天候が「晴れ」,「曇り」,「雨」の3種類しかないとしよう。

「晴れ」の日の次の日が「晴れ」である確率は0.7,「曇り」である確率は0.2,「雨」である確率は0.1。「曇り」の日の次の日が「晴れ」である確率は0.5,「曇り」である確率は

0.3, 「雨」である確率は0.2. 「雨」の日の次の日が「晴れ」である確率は0.3, 「曇り」である確率は0.4, 「雨」である確率は0.3であるとしよう.

今日が「晴れ」とするとき, n 日後の天候が「晴れ」である確率を x_n , 「曇り」である確率を y_n , 「雨」である確率を z_n とするとき, x_{n+1} , y_{n+1} , z_{n+1} を x_n , y_n , z_n で表わせ.

例 17 異なる n 個のものを k 組に分ける分け方の総数を $f(n, k)$ とするとき, $f(n+1, k)$ を $f(n, k)$ と $f(n, k-1)$ を用いて表わしなさい. (ヒント: 特定の1個が単独で1個だけの組を作っている場合とそれが2個以上の組を作っている場合に分けて考えなさい)

また, $f(n, 1) = 1$, $f(n, n) = 1$ であり, 上で作った漸化式を用いて, $f(5, 3)$ を計算しなさい.

例 18 自然数 n をいくつかの自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n)$ とする. また, 自然数 n を k 個の自然数の和に分割する仕方の総数を $p(n, k)$ とする. このとき,

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$$

である.

言い換えると $p(n, k)$ は方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad (x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1)$$

の自然数解 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の個数に等しい. $p(n, k)$ を $p(n-k, k)$ と $p(n-1, k-1)$ を用いて表わせ.. (ヒント: $x_k = 1$ の場合と $x_k \geq 2$ の場合に分けて考えなさい)

さらに, これらを用いて $p(10)$ を計算しなさい.

例 19(Mandelbrot Set) 複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + \alpha, \quad z_0 = 0$$

を考える. $n \rightarrow \infty$ のとき, z_n が有界にとどまるような複素数 α の集合を Mandelbrot Set という. この Mandelbrot Set は複素平面上でどのような集合となるか?

例 20(Julia Set) 複素数の数列の漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 + \beta, \quad z_0 = \alpha$$

を考える. $n \rightarrow \infty$ のとき, z_n が有界にとどまるような複素数 α の集合を Julia Set という. この Julia Set は複素平面上でどのような集合となるか? ただし, β は複素定数とする.