

第1章 プログラミング

1.1 十進 BASIC の使い方について

1.1.1 インストール

- 1) 次のホームページより download する (Yahoo や Google などの検索ページにて「十進 BASIC」で検索してこのページにいてもよい)

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

- 2) download した『BASIC746.zip』(解凍ソフトが必要?)または『BASIC746setup.exe』をダブルクリックして指示に従う。(USB フラッシュメモリにインストールするとよい)
- 3) 『十進 BASIC』の起動は解凍された『BASIC.EXE』をダブルクリック

1.1.2 十進 BASIC の基本の基本

- 1) プログラムは通常，上から順に実行される．
プログラム実行の最後には「END」が必要
- 2) 文字列定数以外は英字の大文字小文字は区別されない(どちらを用いてもよい)
- 3) 変数名は英字に，英字，数字，または_を続けたものを用いる．
また，文字列変数 (文字列を代入するための変数) には末尾に「\$」をつける．
- 4) 代入文 LET_変数名=定数または式 (LET は必ず必要)
 INPUT_変数名
 INPUT_PROMPT_"メッセージ":変数名
- 5) 数値演算 足し算 + 引き算 - 掛け算 * 割り算 /
 巾乗 ^ 2⁵ は 2^5
 演算のカッコは何重になっても丸カッコ () のみを用いる
- 6) 出力文 PRINT_定数または式
 (次に表示されるものは改行して表示される)
 PRINT_定数または式，
 (コンマで終われば，改行せずに間隔をあけて表示)
 PRINT_定数または式；
 (セミコロンで終われば，改行せずに間隔をあけずに表示)
 コンマやセミコロンで区切って，複数個表示することもできる．
- 7) 困ったときにはヘルプ機能で調べる

プログラム例 01

```
PRINT "兵庫県立大学"
PRINT "経済学部"
LET a=2
LET b=5
LET c$="University of Hyogo"
LET d$="Kobe University of Commerce"
PRINT a+b,a-b,a*b,a/b
PRINT c$
PRINT d$
END
```

プログラム例 02

```
INPUT PROMPT "x=(x>0)":x
INPUT PROMPT "y=":y
PRINT "x+y=";x+y,"x-y=";x-y,"x^y=";x^y
END
```

1.1.3 ループ (繰り返し)

(I) FOR ~ NEXT 文

```
FOR 変数=数値 1 TO 数値 2 [STEP 数値 3]
  命令 1
  命令 2
  ...
NEXT 変数
```

変数が数値 1 から数値 2 を越えるまで数値 3 の間隔で増加しながら、各命令の実行を繰り返す。(途中でループから抜け出すときは EXIT FOR)

『入れ子』になってもよい。

プログラム例 03

```
FOR x=1 TO 10
  print x,"KOBE"
NEXT x
END
```

プログラム例 04(1 から 10 まで足すプログラム)

```

LET S=0
FOR X=1 TO 10
  LET S=S+X
NEXT X
PRINT S
END

```

問題 1 INPUT 文を用いて, 1 から n まで足すプログラムにプログラム例 04 を変更しなさい.

問題 2 上の問題 1 を変更追加して次の式を計算するプログラムを作りなさい.

$$(1) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$(3) \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$(4) \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

$$(5) \quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

問題 3 次の数列の漸化式を計算するプログラムを作りなさい.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

$$a_1 = 2$$

$a_2, a_3, \dots, a_{100}$ を表示させなさい.

(II) DO WHILE ~ LOOP 文 (前判定反復)

```

DO WHILE 条件
  命令 1
  命令 2
  ...
LOOP

```

条件が満たされている間は各命令を繰り返す.(途中でループから抜け出すときは EXIT DO)
 ループに入る前に条件をチェックするので, 条件が真でなければ 1 回も実行されない.

条件について

- (1) $\neq$ は 『<>』 または 『><』
- (2) $\geq$ は 『>=』 または 『=>』
- (3) $\leq$ は 『<=』 または 『=<』
- (4) 複数の条件は 『AND』 , 『OR』 で結ぶ .
- (5) 否定の条件は 『NOT』 .

プログラム例 05(1 から 10 まで足すプログラム)

```
LET S=0
LET X=1
DO WHILE X<=10
  LET S=S+X
  LET X=X+1
LOOP
PRINT S
END
```

(III) DO ~ LOOP WHILE 文 (後判定反復)

```
DO
  命令 1
  ...
LOOP WHILE 条件
```

条件が満たされている間は各命令を繰り返す . (途中でループから抜け出すときは EXIT DO)
ループに入った後で条件をチェックするので , 条件が真でなくても 1 回は実行される .

(IV) DO ~ LOOP UNTIL 文 (後判定反復)

```
DO
  命令 1
  ...
LOOP UNTIL 条件
```

条件が真になるまで (偽の間は) 各命令を繰り返す .

(V) DO UNTIL ~ LOOP 文 (前判定反復)

DO UNTIL 条件

命令 1

...

LOOP

条件が真になるまで (偽の間は) 各命令を繰り返す .

プログラム例 06 (自然数の割り算を引き算だけで行うプログラム)

INPUT PROMPT "割られる数 x=" : x

INPUT PROMPT "割る数 y=" : y

LET q=0

DO UNTIL x<y

LET x=x-y

LET q=q+1

LOOP

PRINT "商=" ; q

PRINT "余り=" ; x

END

DO UNTIL x<y の代わりに , DO WHILE x>=y でもよい .

問題 4 ある国の人口は現在 1000 万人とします . この国では 1 年に人口は 3% ずつ増加します . 1 年後, 2 年後, 3 年後, ... の人口が何万人になるかを人口が 2000 万人を超えるまで計算するプログラムを作りなさい . (DO ~ LOOP WHILE を用いなさい)

組み込み関数について

(1) ABS(x) x の絶対値 $|x|$

(2) SQR(x) x の非負の平方根 $\sqrt{x}$

(3) INT(x) x を超えない最大の整数 $[x]$ (Gauss の記号)

(4) $\sin x \rightarrow \text{SIN}(x)$ $\cos x \rightarrow \text{COS}(x)$ $\tan x \rightarrow \text{TAN}(x)$

$\sin^{-1} x \rightarrow \text{ASIN}(x)$ $\cos^{-1} x \rightarrow \text{ACOS}(x)$ $\tan^{-1} x \rightarrow \text{ATN}(x)$

(5) $e^x \rightarrow \text{EXP}(x)$ $\log_e x \rightarrow \text{LOG}(x)$ $\log_{10} x \rightarrow \text{LOG10}(x)$

(6) RND 関数 $0 \leq \text{RND} < 1$ となる一様乱数を与える .

最初に異なる乱数からはじめるためには , 予め RANDOMIZE 文が必要 .

問題5 問題3は $\sqrt{2}$ を近似するプログラムですが、誤差が 10^{-10} より小さくなるまで計算させるプログラムを作りなさい。(DO~LOOP~WHILE を用いなさい)

$\sqrt{2}$ は $\text{SQR}(2)$, $a_n > \sqrt{2}$ が分かっているので、誤差は $a_n - \sqrt{2}$ である。また 10^{-10} は $10^{(-10)}$ とする。

1.1.4 条件分岐

(I) 単純 IF 文 (1 行で記述)

IF 条件 THEN 命令

条件が真であれば命令を実行する。条件が偽であれば命令は実行されず次の行へ行く。

IF 条件 THEN 命令 1 ELSE 命令 2

条件が真であれば命令 1 を実行し、条件が偽であれば命令 2 を実行する。

(II) IF ~ THEN ~ END IF 文 (複数行で記述)

IF 条件 THEN

命令 1

命令 2

...

END IF

条件が真であれば各命令を実行する。条件が偽であれば命令は実行されず END IF の次の行へ行く

(III) IF ~ THEN ~ ELSE ~ END IF 文 (複数行で記述)

IF 条件 THEN

命令 1

ELSE

命令 3

END IF

条件が真であれば命令 1 を実行する。条件が偽であれば命令 3 を実行する。

(IV) ELSEIF

```
IF 条件 1 THEN
  命令 1
ELSEIF 条件 2 THEN
  命令 2
ELSE
  命令 3
ENDIF
```

条件 1 が真であれば命令 1 を実行する．条件 1 が偽で条件 2 が真であれば命令 2 を実行する．条件 1 も条件 2 も偽であれば命令 3 を実行する．

プログラム例 07(1 次方程式 $ax = b$ の解)

```
INPUT PROMPT "a=" : a
INPUT PROMPT "b=" : b
IF a <> 0 THEN
  LET x = b / a
  PRINT "x=" ; x
ELSEIF b = 0 THEN
  PRINT "不定 (無数の解)"
ELSE
  PRINT "解なし"
ENDIF
END
```

プログラム例 08(数当てゲーム)

```
RANDOMIZE
LET X = INT(RND * 10) + 1
DO
  INPUT Y
LOOP WHILE X <> Y
PRINT "当たり"
END
```

問題6 上の数当てゲームのプログラムを次のように変更しなさい。

- (1) 1 ~ 1000 の整数を当てるプログラムに変更しなさい。
- (2) $X > Y$ のときは「もっと大きい」、 $X < Y$ のときは「もっと小さい」と表示させるようにしなさい。
- (3) 当たったときに何回目で当たったかを表示させなさい。

(V) 無限ループとループからの脱出

DO

□□□

LOOP

のように WHILE や UNTIL がなくても、DO□ ~ □LOOP を用いてよいが、このままでは、繰り返しが無限回になってしまう。あるいは、WHILE や UNTIL のある DO□ ~ □LOOP 文や FOR□ ~ □NEXT 文においても途中でループを抜け出したい場合がある。このような場合には、EXIT□DO や EXIT□FOR を用いて、ループを抜け出すことが出来る。

(VI) 多重ループ

FOR□ ~ □NEXT 文や DO□ ~ □LOOP 文は2重、3重に用いることが出来る。用い方については後で具体例で示すことにするが、EXIT□FOR や EXIT□DO を用いてループから抜け出せるのは、すぐ外のループにしか抜け出せない。もっと外のループに抜け出すには GOTO 文を用いる。GOTO 文は余り使わない方がよい(=分かりやすい)とされている。

GOTO□行番号 : プログラムの実行を指定された行番号の行に移動する。

行番号は付けたい行の先頭に自然数を用い、下の行ほど大きい番号を付けなければならない。行番号の直後には半角のスペースが必要である。

問題7 次の各問題に答えるプログラムを作成しなさい。

- (1) ある年の現在の人口を 100 万人とする。毎年人口が 3% ずつ増えていくと 150 万人を突破するのは何年後か？
- (2) 毎月、月初めに 10000 円ずつ積み立てる。年利 3% の利息がつき、月単位の複利で計算されるとする。5 年後 (60 ヶ月後) の元利合計はどれだけになるか？
- (3) 毎月、月初めに 10000 円ずつ積み立てる。年利 3% の利息がつき、月単位の複利で計算されるとする。元利合計が 100 万円に到達するのは何ヶ月後か？
- (4) 銀行から車を購入するために 100 万円を年利 10% で借りました。借りた 1 ヶ月後から毎月 2 万円ずつ返済されていきます。借りている利息は月単位の複利で計算されます。返済が完了するのは何ヶ月後になるか？

1.1.5 グラフィックについて

(I) 座標系の設定

SET_WINDOW 左端座標, 右端座標, 下端座標, 上端座標

(II) 点を描く

PLOT_POINTS: x 座標, y 座標

予め, 打つ点のスタイルを次の命令で定めておく.

SET_POINT_STYLE 数値式

マークの形 (point style) を設定する .

1 . 2 + 3 * 4 o 5 x

(III) 線を描く

PLOT_LINES: x1, y1; x2, y2

(x_1, y_1) から (x_2, y_2) までを線分で結ぶ .

線の色やスタイルを指定したい場合は次の命令で行う .

SET_LINE_COLOR 数値式

色は 0 から 255 までが利用でき, あらかじめ次のように割り当てられている .

0 白, 1 黒, 2 青, 3 緑, 4 赤, 5 水色, 6 黄色, 7 赤紫, 8 灰色, 9 濃い青,
10 濃い緑, 11 青緑, 12 えび茶, 13 オリーブ色, 14 濃い紫, 15 銀色, ...

SET_LINE_STYLE 数値式

線の種類は, 1 実線, 2 破線, 3 点線, 4 一点鎖線

(IV) 円を描く

DRAW_circle (現在の line color で原点を中心とする半径 1 の円を描く)

点 (x, y) を中心とする半径 r の円を描きたいときは,

DRAW_circle WITH_SCALE(r)*SHIFT(x,y)

(V) 座標軸や格子を描く

DRAW_AXES (x 軸と y 軸を描く)

DRAW_GRID (x 軸方向 間隔 1, y 軸方向 間隔 1 の格子を描く)

(VI) 画面消去

CLEAR

(VII) 色を塗る

FLOOD_x,y (点 (x, y) を始点として点 (x, y) と同色でつながる領域を現在の area color で塗りつぶす.)

PAINT_x,y (点 (x, y) を始点として line color の点を境界とする領域を現在の area color で塗りつぶす)

塗りつぶす色の色の設定は

SET_WINDOW_COLOR_数値式

プログラム例 11(グラフィック)

```
SET_WINDOW_-3,3,-3,3
PLOT_LINES:-2,-2;2,-2;2,2;-2,2;-2,-2
PLOT_LINES:-2,-2;2,2
PLOT_LINES:-2,2;2,-2
DRAW_circle_WITH_SCALE(2)
PLOT_POINTS:0,2.5
SET_WINDOW_COLOR_6
paint_1,0
END
```

プログラム例 12(2重ループ)

```
SET_WINDOW_-3,3,-3,3
PLOT_LINES:-2,-2;2,-2;2,2;-2,2;-2,-2
FOR_x=-2_TO_2_STEP_0.4
  PLOT_LINES:x,-2;x,2
NEXT_x
FOR_y=-2_TO_2_STEP_0.4
  PLOT_LINES:-2,y;2,y
NEXT_y
FOR_x=-2+0.2_TO_2_STEP_0.4
  FOR_y=-2+0.2_TO_2_STEP_0.4
    DRAW_circle_WITH_SCALE(0.2)*SHIFT(x,y)
  NEXT_y
NEXT_x
END
```

問題 8 プログラム例 12 を変更して次のようなプログラムを作りなさい。

- (1) 100 個の小円を黄色で塗りつぶしなさい。
- (2) 100 個の小円をランダムな色 (色指標 0 ~ 255) で塗りつぶしなさい。
- (3) 100 個の小円を色指標 1 ~ 100 の色が順番に現れるように塗りつぶしなさい。
- (4) プログラム例 12 の 6 行目を次のように変更しなさい。

FOR y=-2+0.2 TO 2 STEP 0.4 を FOR y=-2+0.2 TO x STEP 0.4

(5) 次図のような 55 個の小円を描くプログラムを作りなさい。

(6) (5) で描いた 55 個の小円をランダムな色 (色指標 0 ~ 255) で塗りつぶしなさい。

1.2 いろいろな曲線

1.2.1 $y = f(x)$ の形のグラフ

平行移動と伸縮

$y = f(x)$ のグラフを

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = f(x - p) + q$

原点を中心に x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍すると $y = bf(\frac{x}{a})$

$f(x, y) = 0$ のグラフを

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると $f(x - p, y - q) = 0$

原点を中心に x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍すると $f(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = 0$

関数 $y = f(x)$ のグラフを描くプログラム

プログラム例 13($y = x^2$ ($-3 \leq x \leq 3$) の graph)

```
SET WINDOW -3, 3, -1, 5
```

```
DRAW AXES
```

```
DEF f(x)=x^2
```

```
LET h=0.1
```

```
FOR x=-5 TO 5-h STEP h
```

```
  PLOT LINES: x, f(x); x+h, f(x+h)
```

```
NEXT x
```

```
END
```

十進 BASIC の追加説明 1

関数の定義 1

```
DEF 関数名(変数)=変数の数式
```

PLOT LINES 文の補足

```
PLOT LINES: x1, y1;
```

(終りがセミコロンで終わるときは紙の上にペンを置いたままの状態)

次の PLOT LINES の点までを線分で結ぶ

```
PLOT LINES: x1, y1
```

(終りがセミコロンで終わらないときは紙の上からペンを離れた状態)

```
PLOT LINES
```

(コロン以下がないときは, 単にペンを紙から離す)

プログラム例 14($y = \frac{1}{x}$ ($-5 \leq x \leq 5$) の graph)

```
SET_WINDOW -5,5,-5,5
DRAW_AXES
DEF f(x)=1/x
LET h=0.1
FOR x=-5 TO 5-h STEP h
  PLOT_LINES: x, f(x); x+h, f(x+h)
NEXT x
END
```

プログラム例 14 は $x = 0$ のとき, 0 が分母にくるためエラーが起こる. このようなエラーが起こるときは次のようなエラー処理を行うことによってエラーを回避できる.

プログラム例 14-2($y = \frac{1}{x}$ ($-5 \leq x \leq 5$) の graph)

```
SET_WINDOW -5,5,-5,5
DRAW_AXES
DEF f(x)=1/x
LET h=0.1
FOR x=-5 TO 5-h STEP h
  WHEN_EXCEPTION IN
    PLOT_LINES: x, f(x); x+h, f(x+h)
  USE
    PLOT_LINES
  END_WHEN
NEXT x
END
```

十進 BASIC の追加説明 2

エラー処理

```
WHEN_EXCEPTION IN
  命令 1
  USE
  命令 2
  END_WHEN
```

命令 1 の中でエラーが生じれば命令 1 を行わず, 命令 2 を行う.

問題9 次の関数のグラフがどのようなになるか数学的に考えよ．また，そのグラフを描くプログラムを作成し，実行せよ．(x の範囲には定義されない部分も含まれている．なるべく縦と横の縮尺を同じにせよ)．また， $y = f(x)$ は青色で， $y = g(x)$ は緑色で， $y = h(x)$ は赤色で描きなさい．

$$(1) \quad y = f(x) = x^3 - x \quad , \quad y = g(x) = x^4 - 2x^2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(2) \quad y = f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(3) \quad y = f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , \quad y = g(x) = x - \frac{1}{x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(4) \quad y = f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 3) \quad (\sqrt{x} = \text{SQR}(x))$$

$$(5) \quad y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad , \quad y = g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(6) \quad y = f(x) = \sin x \quad , \quad y = g(x) = \cos x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(\sin x = \text{SIN}(x) \quad , \quad \cos x = \text{COS}(x))$$

$$(7) \quad y = f(x) = \cos x + \frac{1}{10} \sin 40x \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(8) \quad y = f(x) = x \cos \frac{1}{x} \quad (-0.1 \leq x \leq 0.1)$$

$$(9) \quad y = f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(10) \quad y = f(x) = f(x) = \sin 11x + \sin 12x \quad (-10 \leq x \leq 10)$$

$$(11) \quad y = f(x) = \tan^{-1} x \quad , \quad y = g(x) = \tan x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(\tan x = \text{TAN}(x) \quad , \quad \tan^{-1} x = \text{ATN}(x))$$

$$(12) \quad y = f(x) = 2^x \quad , \quad y = g(x) = 2^{-x} \quad , \quad y = h(x) = \log_2 x \quad (-7 \leq x \leq 7)$$

$$(\log_a x = \text{LOG}(X)/\text{LOG}(a) \quad \text{特に} \quad \log_2 x = \text{LOG2}(x) \quad , \quad \log_{10} x = \text{LOG10}(x))$$

$$(13) \quad y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad y = g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = h(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

$$(e^x = \text{EXP}(x) \quad , \quad \text{特に} \quad \cosh x = \text{COSH}(x) \quad , \quad \sinh x = \text{SINH}(x) \quad , \quad \tanh x = \text{TANH}(x))$$

$$(14) \quad y = f(x) = [x] \quad , \quad y = g(x) = x - [x] \quad (-5 \leq x \leq 5) \quad ([x] = \text{INT}(x))$$

1.2.2 曲線の媒介変数表示

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t : \alpha \longrightarrow \beta$$

t が α から β まで変化するとき, $(f(t), g(t))$ を座標とする点 P は xy 平面上を動き, その軌跡は曲線となる. 上のような表示をこの曲線の 媒介変数表示 あるいは para-meter 表示 といい, このときの変数 t を 媒介変数 (para-meter) という. また, 点 $(f(\alpha), g(\alpha))$ を 始点, 点 $(f(\beta), g(\beta))$ を 終点 という.

例 1(cycloid)

半径 a の円板をある直線に沿って, 滑らさずに回転させるとき, 円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を サイクロイド (cycloid) という. サイクロイドは次のように媒介変数表示される.

$$\begin{cases} x = a\theta - a \sin \theta \\ y = a - a \cos \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow \beta$$

プログラム例 15(cycloid)

```
SET WINDOW -1,7,-1,7
DRAW AXES
DEF f(t)=t-SIN(t)
DEF g(t)=1-COS(t)
LET h=0.01
FOR t=0 TO 8-h STEP h
  PLOT LINES: f(t),g(t);f(t+h),g(t+h)
NEXT t
END
```

例 2(epicycloid)

半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って外側を, 滑らさずに回転させるとき, 円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 外サイクロイド (epicycloid) という. これは次のように媒介変数表示される.

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b} \theta \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow \beta$$

例 3(hypocycloid)

半径 b の円板をある固定した半径 a の円の円周に沿って内側を、滑らずに回転させるとき、円板の円周上の固定点 P の動く軌跡を 内サイクロイド (hypocycloid) という。これは次のように媒介変数表示される。(ただし、 $b < a$)

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b} \theta \\ y = (a - b) \sin \theta - b \sin \frac{a-b}{b} \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow \beta$$

例 4(リサージュ (Lissajous) 曲線)

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad t : 0 \longrightarrow \beta$$

あるいは

$$\begin{cases} x = A \cos(at) \\ y = B \sin(bt + \delta) \end{cases} \quad t : 0 \longrightarrow \beta$$

例 5(楕円と双曲線)

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

あるいは

$$\begin{cases} x = a \cosh t = a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \sinh t = b \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t : -\infty \longrightarrow \infty$$

問題 10 サイクロイド、エピサイクロイド、ハイポサイクロイドはいずれも、円周上の点の軌跡であったが、円周上にない場合(円の内部の点や外部の点の軌跡の場合)にはこれらをそれぞれ、トロコイド (trochoid)、エピトロコイド (epitrochoid)、ハイポトロコイド (hypotrochoid) という。これらの曲線を媒介変数表示し、それらを描くプログラムを作成して、コンピュータに描かせよ。

問題 11 円： $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$ に糸を巻き付け，それを引っ張りながら解いていくとき，糸の端の点の描く曲線を媒介変数表示し，それを描くプログラムを作成して，コンピュータに描かせよ．ただし，糸の端は，最初は点 $(a, 0)$ にあるとせよ．

1.2.3 極座標と曲線

平面上の点 P の位置を表すのに，今までは xy -座標を用いてきた．この他に次のような表し方もある．平面上の定点 O と O から引いた半直線 OX を定めておく．

$$OP = r , \quad \angle XOP = \theta$$

とすると，点 P の位置を (r, θ) とする．このような座標を 極座標 という． θ は時計と反対周りに一般角を考え， r が負の値の場合には，

$$OP' = |r| , \quad \angle XOP' = \theta$$

とすると，点 P は P' と原点 O に関して対称な位置を表すことにする．

r と θ の関係式 $f(r, \theta) = 0$ は極座標において曲線を表す．この関係式を 極方程式 という．

また，OX を x 軸とし，O を通り，それに直交する直線を y 軸とすると，2 つの座標の間には次の関係がある．

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \frac{\pi}{2} & (x = 0, y > 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{2} & (x = 0, y < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

例 6(直線)

原点を通る直線： $\theta = \alpha$ (α : 定数)

極座標が (r_0, α) で表される点 A を通り OA に直交する直線： $r \cos(\theta - \alpha) = r_0$

例 7(円)

原点を中心とし，半径 r_0 の円： $r = r_0$ (r_0 : 定数)

極座標が (r_1, α) を中心とし，半径 r_0 の円： $r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \alpha) - r_0^2 = 0$

例 8(アルキメデスの螺線 (らせん))

$$r = a\theta \quad (a > 0)$$

例 9(等角螺線, 対数螺線)

$$r = a^{\theta} \quad (a > 1)$$

例 10(正葉線)

$$r = a \sin n\theta \quad (a > 0, n \text{ は自然数})$$

例 11(Pascal のリマソン (limaçon=かたつむり))

$$r = a \cos \theta + b \quad (a > 0, b > 0)$$

$a = b$ のときは カージオイド (cardioid) という.

問題 12 例 8(アルキメデスの螺線) と例 9(対数螺線) のグラフを手で描いてみなさい.

問題 13 例 10(正葉線) のグラフを $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に手で描いてみなさい.

問題 14 例 11(Pascal のリマソン) のグラフを $a > b$, $a = b$, $b = 2a$ の各場合に手で描いてみなさい.

$r = f(\theta)$ のように書くことのできる極方程式の定める曲線は, 次のように媒介変数表示もできる.

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

問題 15 問題 4 ~ 問題 6 の各問題の曲線をコンピュータに描かせるプログラムを作成し, コンピュータに描かせなさい.

1.3 数値計算

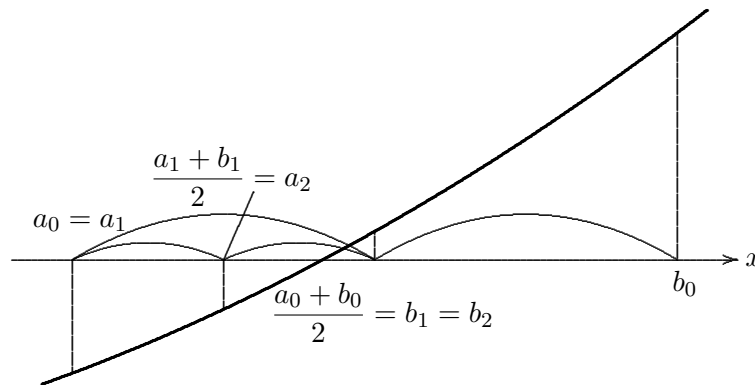
1.3.1 方程式の解の近似

方程式

$$f(x) = 0$$

の解 α を近似する方法について考える.

2 分法 (区間縮小法)



有界閉区間 $[a, b]$ において, $f(x)$ は次の条件を満たしていると仮定する .

- $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で連続
- 両端における $f(x)$ の値 $f(a)$ の符号と $f(b)$ における符号は異符号とする .
すなわち , $f(a)f(b) < 0$
- $f(x) = 0$ の解は有界閉区間 $[a, b]$ において唯一つしかないとする .

このとき , 以下の手順で解 α を近似する .

今 , $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する . (逆の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $a_0 = a$, $b_0 = b$ とする .

(1) a_0 と b_0 の中点 $\frac{a_0 + b_0}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる .

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) = 0$ のときは , 解は $\alpha = \frac{a_0 + b_0}{2}$ となり , 完了 .

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) < 0$ のときは , $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = b_0$ とする .

$f(\frac{a_0 + b_0}{2}) > 0$ のときは , $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ とする .

このとき, α は a_1 と b_1 の間に存在する.

(2) a_1 と b_1 の中点 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_1 + b_1}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < 0$ のときは, $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = b_1$ とする.

$f(\frac{a_1 + b_1}{2}) > 0$ のときは, $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ とする.

このとき, α は a_2 と b_2 の間に存在する.

.....

(k) a_{k-1} と b_{k-1} の中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ における $f(x)$ の符号を調べる.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) = 0$ のときは, 解は $\alpha = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ となり, 完了.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) < 0$ のときは, $a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, $b_k = b_{k-1}$ とする.

$f(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}) > 0$ のときは, $a_k = a_{k-1}$, $b_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ とする.

このとき, α は a_k と b_k の間に存在する.

$b = k - a_k$ が要求された精度 (誤差の限界) より, 小さくなれば, 中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ を近似解として採用する. 誤差 E は

$$E \leq b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

と評価できるが, 能率はよくない.

n 等分法

2 分法では区間を 2 等分ずつ行っていたが, ここでは n 等分して考える.

今, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (逆の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $a_0 = a$, $b_0 = b$ とする.

(1) 区間 $[a_0, b_0]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_1 , 右の点を b_1 とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

(2) 区間 $[a_1, b_1]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_2 , 右の点を b_2 とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

.....

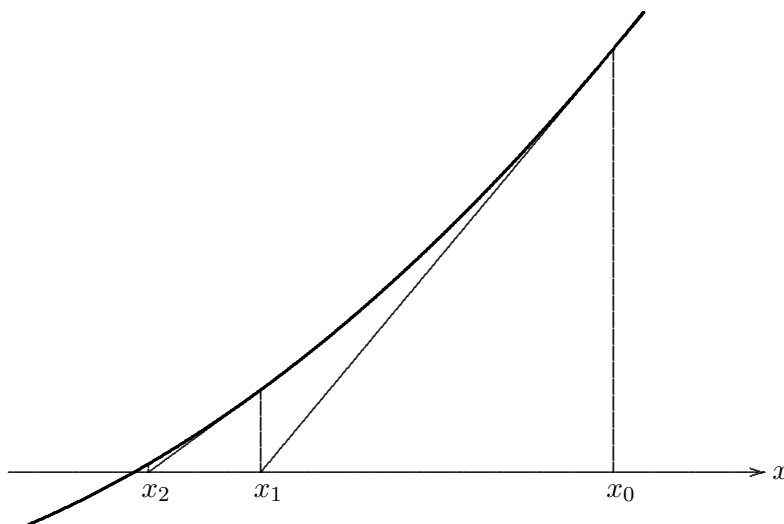
(k) 区間 $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ を n 等分し, 隣り合った分点の組で $f(x)$ の符号が異符号になっている分点の組を求める. その左の点を a_k , 右の点を b_k とする. 分点の中で $f(x)$ の値が 0 になる分点があれば, それが求める解なので完了.

$b - a = b_k - a_k$ が要求された精度 (誤差の限界) より, 小さくなれば, 中点 $\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ を近似解として採用する. 誤差 E は

$$E \leq b_k - a_k = \frac{1}{n^k}(b - a)$$

と評価できる. 能率はは 2 分法と比べてどうだろうか?

Newton 法



有界閉区間 $[a, b]$ において, $f(x)$ は次の条件を満たしていると仮定する.

- $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で 2 回微分可能で $f''(x)$ は定符号
- 両端における $f(x)$ の値 $f(a)$ の符号と $f(b)$ における符号は異符号とする.

すなわち, $f(a)f(b) < 0$

このとき, a と b の間にはただ一つの解を持つ. 以下の手順で解 α を近似する.

今, $f''(x) > 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定する. (他の場合も同様の手順で近似できる)

(0) $x_0 = b$ とする.

(1) x_0 における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ を引き, x 軸と交わった交点を x_1 とする. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(2) 同様に, x_1 における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ を引き,

x 軸と交わった交点を x_2 とする . $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

.....

(k) x_{k-1} における $y = f(x)$ の接線 $y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$ を引き ,
 x 軸と交わった交点を x_k とする . $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

以上まとめると ,

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\ x_0 = b \text{ (初期値) または } x_0 = a \end{cases}$$

初期値 x_0 を a にとるか b にとるかは , $f(a)$ あるいは $f(b)$ が $f''(x)$ と同符号になるように選ぶとよい.

誤差の評価を行うのに , $f(x)$ を $x = x_{k-1}$ において Taylor の定理を適用すると ($n = 2$)

$$f(\alpha) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(\alpha - x_{k-1}) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - x_{k-1})^2$$

$$E_k = |x_k - \alpha| = \left| x_{k-1} - \alpha - \frac{f(x_{k-1}) - f(\alpha)}{f'(x_{k-1})} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c)}{f'(x_{k-1})} \right| |x_{k-1} - \alpha|^2$$

ここで , $m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ とおけば ,

$$E_k \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_{k-1} - \alpha|^2 = \frac{M_2}{2m_1} E_{k-1}^2$$

このような収束を 2 次収束 といい , 非常によい近似になっている . これに対して , 2 分法や n 等分法は $E_k \leq cE_{k-1}$ の評価なので , 1 次収束 となっている .

割線法 (セカント法)

Newton 法では , 接線を用いたがここでは接線の代わりに曲線上の 2 点を結ぶ直線 (割線) を用いてみよう .

2 点 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

となるので , x 軸との交点は $x = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ となる . これを x_{k+1} とおく .

Newton 法と同様に次の式が得られる .

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ \text{初期値} \quad x_0, x_1 \end{cases}$$