

1. 全体集合を $X = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 100\}$ とする. ここで $\mathbf{N}$ は自然数全体の集合とする. また,

$$A = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 7 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 13 \text{ の倍数}\}$$

とすると、次の集合の濃度 (個数) を求めよ. また、濃度が 10 個以下のものは元 (要素) をすべて列挙せよ.

$$(1) A \cap B \quad (2) B \cup C \quad (3) A^c \cap C \quad (4) A^c \cup B^c$$

2. 次の写像 $f: X \longrightarrow Y$ は全射になっているか、単射になっているかを調べよ. 全射になっていない場合や単射になっていない場合にはその理由を説明せよ.

$$(1) f: X = \mathbf{Z} \longrightarrow Y = \{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ かつ } 0 \leq n\} \quad y = f(x) = x^2$$

$$(2) f: X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \longrightarrow Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$y = f(x) = x \text{ を } 2 \text{ 乗して } 10 \text{ で割った余り}$$

3. (1) 7 進法表示された数 $321_{(7)}$ を 10 進法で表わせ.

(2) 1111 を 7 進法で表わせ.

4. Euclid の互除法を用いて、119 と 221 の最大公約数 $d = g.c.d.(119, 221)$ を求めなさい.

また、 $119x + 221y = d$ となる整数 x, y を 1 組与えなさい.

5. 次の逆元を求めよ.

$$(1) 3^{-1} \equiv ? \pmod{7} \quad (2) 7^{-1} \equiv ? \pmod{9} \quad (3) 9^{-1} \equiv ? \pmod{13}$$

6. 次の方程式を解け.

$$(1) 3x \equiv 7 \pmod{8} \quad (2) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

7. 置換群について、次の問いに答えよ.

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の逆元を求めなさい.
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 巡回置換の積で表わし、さらに互換の積で表わせ.
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ となる置換 x を求めなさい.

8. 命題: $\neg(p \wedge q)$ の真偽表を作れ.

9. $p(x) = \text{『}x \text{は天才だ』}$, $q(x) = \text{『}x \text{は孤独だ』}$ とするとき、次の命題を $p(x)$, $q(x)$ を用いて表わせ.

- (1) 天才はいる.
- (2) あらゆる人間は孤独だ.
- (3) すべての天才は孤独である.
- (4) 天才なのに孤独でない人はいる.
- (5) 天才はみな孤独であるとは限らない.

10. 次の命題を形式化し、否定命題を記号で書け. また、その否定命題を文章で表わせ.

- (1) ある y が存在して、すべての数 x について $10^x \geq y$ である.
- (2) すべての y に対して、 $y = x^3$ となる x が存在する.