

1. 全体集合を $X = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 100\}$ とする. ここで $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合とする. また,

$$A = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 4 \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 6 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 10 \text{ の倍数}\}$$

とすると、次の集合の濃度 (個数) を求めよ.

- (1) A, B, C (2) $A \cap B, B \cap C, C \cap A$
 (3) $A \cup B$ (4) $A^c \cup B^c$ (5) $A^c \cap B^c$

2. $X = [0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ から $Y = [100, 1000] = \{y \mid 100 \leq y \leq 1000\}$ への全単射を作れ.

3. 次の写像を考える.

$$f: X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \longrightarrow Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$y = f(x) = (3x + 2) \text{ を } 10 \text{ で割った余り}$$

$f(0), f(1), f(2), \dots, f(9)$ を計算し, f が全射になっているか? 単射になっているか? を調べよ.

全単射になっているときは, f の逆写像を f^{-1} とするとき, $f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(9)$ を求めよ. 全射や単射になっていない場合にはその理由を述べよ.

4. (1) 8 進法表示された数 $722_{(8)}$ を 10 進法で表わせ.

- (2) 10 進法表示された数 722 を 8 進法で表わせ.

5. Euclid の互除法を用いて, 1568 と 805 の最大公約数 $d = g.c.d.(1568, 805)$ を求めなさい.

また, $1568x + 805y = d$ となる整数 x, y を 1 組与えなさい.

6. 次の連立合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

に関連して以下の問に答えよ.

- (1) $(6 \times 7)^{-1} \equiv 2^{-1} \pmod{5}$?
 (2) $(5 \times 7)^{-1} \equiv 5^{-1} \pmod{6}$?
 (3) $(5 \times 6)^{-1} \equiv 2^{-1} \pmod{7}$?
 (4) 元の連立合同方程式の解 x を求めよ.

7. 置換群について，次の問いに答えよ．

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ の逆元を求めよ．
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ を巡回置換の積で表わし，さらにそれを互換の積で表わせ．
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ となる置換 x を求めよ．

8. 命題： $(\neg p) \vee q$ の真偽表を作れ．

9. $p(x) = \text{『}x \text{は天才だ』}$ ， $q(x) = \text{『}x \text{は数学がよくできる』}$ とおく．また， x の対象領域をすべての人間とする．次の命題を $p(x)$ ， $q(x)$ を用いて表わせ．

- (1) 天才はいる．
- (2) 人間はみんな数学がよくできるとは限らない．
- (3) すべての天才は数学がよくできる．
- (4) 天才なのに数学があまりできない人はいる．
- (5) 数学がよくできる人はみんな天才だ．

10. 次の命題を記号化し，否定命題を記号で書け．また，その否定命題を文章で表わせ．ただし， x の対象領域は実数全体とする．

- (1) すべての数 y に対して， y より大きい数 x がある．
- (2) ある数 y が存在して，すべての数 x は y 以上になっている．