

1. 全体集合を $X = \{x \mid x \in N \text{ かつ } 1 \leq x \leq 100\}$ とする．ここで N は自然数全体の集合とする．また，

$$A = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 6 \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 8 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \equiv 3 \pmod{7}\} = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \text{ は } 7 \text{ で割ると } 3 \text{ 余る数}\}$$

次の集合の濃度 (個数) を求めよ．また，濃度が 10 個以下のものは元 (要素) をすべて列挙せよ．

(15 点)

- (1) A, B, C (2) $A \cap B, A \cap C$ (3) $A \cup B$
 (4) $A^c \cup B^c$ (5) $A^c \cap B^c$

2. 次の 2 つの真偽表を完成せよ．(10 点)

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

3. $p(x) = \text{『} x \text{ はアメリカ人である』}$ ，

$$q(x) = \text{『} x \text{ は野球が好きである』}$$

とおく．また， x の対象領域をすべての人間とする．次の命題を $p(x)$ ， $q(x)$ を用いて表わせ．

(10 点)

- (1) 野球が好きな人はいる．
 (2) アメリカ人はみんな野球が好きである．
 (3) アメリカ人でないのに野球が好きな人はいる．
 (4) アメリカ人なのに野球が好きでない人がいる．
 (5) 野球が好きでない人はアメリカ人ではない．

4. $p(x, n) = \text{『} x < n \text{』}$

とおく． x の対象領域をすべての正の実数とし， n の対象領域をすべての自然数とする．

次の命題を $p(x, n)$ を用いて表わせ．また，その否定命題を記号と文章で表わせ．(15 点)

『すべての正の実数 x に対して， $x < n$ となる自然数 n が存在する』

5. 次の写像を考える .

$$f : X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \longrightarrow Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$y = f(x) = (7x + 3) \text{ を } 10 \text{ で割った余り}$$

$f(0), f(1), f(2), \dots, f(9)$ を計算し, f が全射になっているか? 単射になっているか? を調べよ .
全単射になっているときは, f の逆写像を f^{-1} とするとき, $f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(9)$ を求めよ . 全射や単射になっていない場合にはその理由を述べよ . (10 点)

6. 次の問に答えよ . (10 点)

(1) 8 進法表示された数 $2322_{(8)}$ を 10 進法で表わせ .

(2) 10 進法表示された数 93418 を 26 進法で表わせ . ただし, $A = 0, B = 1, C = 2, \dots, Z = 25$ とする .

7. Euclid の互除法を用いて, 689 と 143 の最大公約数 $d = g.c.d.(689, 143)$ を求めなさい .

また, $689x + 143y = d$ となる整数 x, y を 1 組与えなさい . (15 点)

8. 次の連立合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$$

に対して以下の問に答えよ . (15 点)

(1) $(7 \times 9)^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv ? \pmod{5}$

(2) $(5 \times 9)^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv ? \pmod{7}$

(3) $(5 \times 7)^{-1} \equiv 8^{-1} \equiv ? \pmod{9}$

(4) 元の連立合同方程式の解 x を求めよ .

数学 (A) 2007 年度定期試験解答

1. (1) $A = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 16\}$, $\#(A) = 16$
 $B = \{8 \cdot 1, 8 \cdot 2, 8 \cdot 3, \dots, 8 \cdot 12\}$, $\#(B) = 12$
 $C = \{3 + 7 \cdot 0, 3 + 7 \cdot 1, 3 + 7 \cdot 2, \dots, 3 + 7 \cdot 13\}$, $\#(C) = 14$
(2) $A \cap B = \{24, 48, 72, 96\}$, $\#(A \cap B) = 4$, $A \cap C = \{24, 66\}$, $\#(A \cap C) = 2$
(3) $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = 16 + 12 - 4 = 24$
(4) $\#(A^c \cup B^c) = \#((A \cap B)^c) = \#(X) - \#(A \cap B) = 100 - 4 = 96$
(5) $\#(A^c \cap B^c) = \#((A \cup B)^c) = \#(X) - \#(A \cup B) = 100 - 24 = 76$

2.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

3. (1) $\exists x q(x)$
(2) $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$
(3) $\exists x((\neg p(x)) \wedge q(x))$
(4) $\exists x(p(x) \wedge (\neg q(x)))$
(5) $\forall x((\neg q(x)) \Rightarrow (\neg p(x)))$

4. 『すべての正の実数 x に対して, $x < n$ となる自然数 n が存在する』 $= \forall x \exists n p(x, n)$

否定命題: $\neg(\forall x \exists n p(x, n)) \equiv \exists x \forall n (\neg p(x, n))$

『ある正の実数 x が存在して, すべての自然数 n に対して $x \geq n$ となる』

5. $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 7$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = 8$, $f(6) = 5$
 $f(7) = 2$, $f(8) = 9$, $f(9) = 6$ 全単射になっている .
 $f^{-1}(0) = 1$, $f^{-1}(1) = 4$, $f^{-1}(2) = 7$, $f^{-1}(3) = 0$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(5) = 6$, $f^{-1}(6) = 9$
 $f^{-1}(7) = 2$, $f^{-1}(8) = 5$, $f^{-1}(9) = 8$

6. (1) $(2322)_8 = 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 2 = 1234$

(2) $93418 = (\text{FIFA})_{26}$ (試験のときには計算も記述すること)

7. $g.c.d.(689, 143) = 13$

$$g.c.d.(689, 143)13 = 689 \cdot 5 - 143 \cdot 24$$

$$x = 5, \quad y = -24$$

(試験のときには計算も記述すること)

8.

(1) $(7 \times 9)^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv 2 \pmod{5}$

(2) $(5 \times 9)^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv 5 \pmod{7}$

(3) $(5 \times 7)^{-1} \equiv 8^{-1} \equiv 8 \pmod{9}$

(4) $x \equiv 1 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \equiv 1416 \equiv 156 \pmod{315}$