# 数学 (A) 2008 年度定期試験　問題

08/07/24(木) 3 時限　　担当　伊吹和彦

**1.** 全体集合を $X = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}$ かつ $1 \leqq x \leqq 100\}$ とする．ここで $\boldsymbol{N}$ は自然数全体の集合とする．また，

$A = \{x \mid x \in X$ かつ $x$ は 12 の倍数 $\}$

$B = \{x \mid x \in X$ かつ $x$ は 8 の倍数 $\}$

$C = \{x^2 \mid x \in X$ かつ $x^2 \leqq 100\}$

次の集合の濃度 (個数) を求めよ．また，濃度が 10 個以下のものは元 (要素) をすべて列挙せよ．

(15 点)

(1) $A$ , $B$ , $C$　　(2) $A \cap B$ , $B \cap C$　　(3) $A \cup B$

(4) $A^c \cup B^c$　　(5) $A^c \cap B^c$

**2.** 次の 2 つの真偽表を完成せよ．(10 点)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | | |
| T | F | | |
| F | T | | |
| F | F | | |

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $(\neg p) \wedge (\neg q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | | | |
| T | F | | | |
| F | T | | | |
| F | F | | | |

**3.** $p(x) =$『$x$ はひょうたん島に住んでいる』,

$q(x) =$『$x$ はバナナが好きである』

とおく．また，$x$ の対象領域をすべての人間とする．次の命題を $p(x)$ , $q(x)$ を用いて表わせ．

(10 点)

(1) ひょうたん島に住んでいる人はいる．

(2) バナナが好きな人はいない．

(3) ひょうたん島に住んでいる人はみんなバナナが好きである．

(4) ひょうたん島に住んでいない人でバナナが好きな人がいる．

(5) ひょうたん島に住んでいる人でバナナが好きでない人がいる．

**4.** $p(m, n) =$ 『 $m$ は $n$ より大きい 』

とおく．$m$ と $n$ の対象領域をすべての整数とする．

次の命題を $p(m, n)$ を用いて表わせ．また，その否定命題を記号と文章で表わせ．(10 点)

『ある整数 $m$ が存在して，$m$ はどんな整数 $n$ よりも大きい』

**5.** 次の写像を考える．

$$f : X = \{0,1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$
$$y = f(x) = (x^2\text{を }7\text{ で割った余り})$$

$f(0), f(1), f(2), \cdots, f(6)$ を計算し，$f$ が全射になっているか？単射になっているか？を調べよ．全単射になっているときは，$f$ の逆写像を $f^{-1}$ とするとき，$f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(2), \cdots, f^{-1}(6)$ を求めよ．全射や単射になっていない場合にはその理由を述べよ．(10 点)

**6.** 次の問に答えよ．(10 点)

(1) 7 進法表示された数 $(50664)_7$ を 10 進法で表わせ．

(2) 10 進法表示された数 35609 を 26 進法で表わせ．ただし，$\mathrm{A}=0, \mathrm{B}=1, \mathrm{C}=2, \cdots, \mathrm{Z}=25$ とする．

**7.** Euclid の互除法を用いて，559 と 247 の最大公約数 $d = g.c.d.(559, 247)$ を求めなさい．また，$559x + 247y = d$ となる整数 $x, y$ を 1 組与えなさい．(15 点)

**8.** 次の連立合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 7 \\ x \equiv 7 \mod 8 \\ x \equiv 8 \mod 9 \end{cases}$$

に対して以下の問に答えよ．(15 点)

(1) $(8 \times 9)^{-1} \equiv 2^{-1} \equiv ? \mod 7$

(2) $(7 \times 9)^{-1} \equiv 7^{-1} \equiv ? \mod 8$

(3) $(7 \times 8)^{-1} \equiv 2^{-1} \equiv ? \mod 9$

(4) 連立合同方程式の解 $x$ を求めよ．

**9.** 置換群について，次の問いに答えよ．(15 点)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ の逆元を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ を巡回置換の積で表わし，さらにそれを互換の積で表わせ．

# 数学 (A) 2008 年度定期試験解答例

担当　伊吹和彦

**1.** (1) $A=\{12,24,36,48,60,72,84,96\}$ , $\#(A)=8$ , $\#(B)=12$

$C=\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$ , $\#(C)=10$

(2) $A\cap B=\{x|x$ は 24 の倍数 $\}=\{24,48,72,96\}$ , $\#(A\cap B)=4$

$B\cap C=\{16,64\}$ , $\#(B\cap C)=2$

(3) $\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)=8+12-4=16$

(4) $\#(A^c\cup B^c)=\#((A\cap B)^c)=\#(X)-\#(A\cap B)=100-4=96$

(5) $\#(A^c\cap B^c)=\#((A\cup B)^c)=\#(X)-\#(A\cup B)=100-16=84$

**2.**

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ | $\neg(p\vee q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F |
| T | F | T | F |
| F | T | T | F |
| F | F | F | T |

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $(\neg p)\wedge(\neg q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

**3.** (1) $\exists xp(x))$

(2) $\neg\exists xq(x)$ または $\forall x(\neg q(x))$

(3) $\forall x(p(x)\Rightarrow q(x))$

(4) $\exists x((\neg p(x))\wedge q(x))$

(5) $\exists x(p(x)\wedge(\neg q(x)))$

**4.** 『ある整数 $m$ が存在して，$m$ はどんな整数 $n$ よりも大きい』：$\exists m\forall np(m,n)$

否定命題：$\neg\exists m\forall np(m,n)\equiv\forall m\exists n(\neg p(m,n))$

『すべての整数 $m$ に対して，ある整数 $n$ が存在して，$m$ は $n$ より大きくない』

あるいは　『すべての整数 $m$ に対して，$m$ 以上の整数 $n$ が存在する』

**5.** $f(0)=0$ , $f(1)=1$ , $f(2)=4$ , $f(3)=2$ , $f(4)=2$ , $f(5)=4$ , $f(6)=1$

これは全射ではない．なぜなら $y=3$ や $y=5$ や $y=6$ には写されないから．

これは単射ではない．

なぜなら $f(3)=f(4)$ , $f(1)=f(6)$ , $f(2)=f(5)$ となっているから．

**6.** (1) $(50664)_7=5\cdot 7^4+6\cdot 7^2+6\cdot 7+4=12005+294+42+4=12345$

(2) $35609=(\mathrm{CARP})_{26}$ **(試験のときには計算も記述すること)**

**7.** $g.c.d.(559,247)=13$ , $13=559\cdot 4-247\cdot 9$ , $x=4$ , $y=-9$

**(試験のときには計算も記述すること)**

**8.** (1) $(8\times 9)^{-1}\equiv 2^{-1}\equiv 4 \mod 7$

(2) $(7\times 9)^{-1}\equiv 7^{-1}\equiv 7 \mod 8$

(3) $(7\times 8)^{-1}\equiv 2^{-1}\equiv 5 \mod 9$

(4) $x\equiv 6\cdot 8\cdot 9\cdot 4+7\cdot 7\cdot 9\cdot 7+8\cdot 7\cdot 8\cdot 5$

$$=1728+3087+2240=7055\equiv 503 \mod 7\cdot 8\cdot 9$$

**9.** (1) $$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&1&2&3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&1&6&2\end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&7&3&2&4&6&1\end{pmatrix}=(1,5,2,8)(3,7,6,4)=(1,8)(1,2)(1,5)(3,4)(3,6)(3,7)$$