Appendix A

十進BASICの簡単な説明

BASICは

Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code

の略称であり,『FORTRAN』,『COBOL』,『C』,『JAVA』,『PASCAL』と同様のプログラミング言語である．十数年前までは，パソコン(NEC製がほとんどであった）を買うと,『N88-BASIC』が標準として付属していたが，最近では『Windows』が普及して，コンピュータの用途が「ワープロ」,「表計算」,「インターネット」などが多くを占め，ほとんどのユーザーが「プログラミング」を組むことが少なくなってきている．

BASIC言語は

(1)　形式にあまりこだわらなくて良い．

(2)　グラフィック機能が簡単に使える．

といった特徴をもっている．

この授業で使用する(仮称)十進BASICは文教大学の白石和夫氏が作成したBASICのプログラミング言語である．詳しくは，downloadした自己解凍ファイルに含まれる『TUTORIAL.PDF』を参考にされるとよい．次のホームページ

http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/

から最新の(仮称)十進BASICがdownloadでき，そのリンク先にも有用な情報が含まれている．

プログラム例1(prog1.bas 変数と四則演算)

```
10␣LET␣A=25
20␣LET␣B=37
30␣PRINT␣A+B
40␣PRINT␣A-B
50␣PRINT␣A*B
60␣PRINT␣A/B
70␣END
```

プログラム例1の説明

このプログラムにおいては行番号が付けてあるが，説明のために付けたもので，なくてもかまわない．(無いいほうがよいかも知れない)

プログラムの実行は指定が無ければ上から順に実行される．

10,20行目 ：ここで「A」,「B」は数値変数である．
変数とは記憶する場所のように考えればよい．
「LET」は変数に数値や文字を代入する命令である．(他のBASICでは省略されることが多いが，このBASICでは省略は許されない．
数値変数名は英字で始まる英数字とする．

30–60行目 ：「PRINT」は画面に出力する命令
ここでは2つの変数に代入された数の和・差・積・商を表示させる．
演算記号は和(+)，差(–)，積(*)，商(/)を用いる．

70行目 ：「END」はプログラムの実行を終了させる命令．

★ `LET` **変数** `=` **数値または数式** (代入文)

★ `PRINT` **数値または数式または文字列** (画面への出力文)

ここで，10行目と20行目を次のように変更しよう．

```
10␣INPUT␣A
20␣INPUT␣B
```

★ `INPUT` **変数** (キーボードから変数に数値や文字列を代入させる命令)

プログラム例2(prog2.bas　数当てゲーム)

```
10␣RANDOMIZE
20␣LET␣X=INT(RND*10)
30␣INPUT␣A
40␣IF␣A<X␣THEN␣PRINT␣"もっと大きいよ"
50␣IF␣A>X␣THEN␣PRINT␣"もっと小さいよ"
60␣IF␣A=X␣THEN
70␣␣␣␣PRINT␣"あたり"
80␣␣␣␣GOTO␣110
90␣END␣IF
100␣GOTO␣30
110␣END
```

プログラム例2の説明

10行目　：乱数の系列を設定する命令.

20行目　：「INT」は整数部分を与える関数.
(「INT(Y)」はY以下の最大の整数を表す. Gaussの記号と同じ)
「RND」は乱数で，0以上1未満の数がランダムにあらわれる.
「INT(RND*10)」は0以上1未満の数を10倍し，その小数点以下を切り捨てるので，0以上9以下の整数がランダムにあらわれる.

40行目　：「IF 条件 THEN 命令」は『条件』が『真』の時『命令』を実行する.
『A<X』の時は「もっと大きいよ」と画面に表示する.
『"もっと大きいよ"』は文字列定数であり，文字列定数は2つの『"』ではさむ.

50行目　：40行目と同様.

60–90行目　：『IF』文の命令が2つ以上あり，2行以上にわたって書くときは次のように書く.

```
IF 条件 then
   命令1
   命令2
   ....
END IF
```

80,100行目　：『GOTO 行番号』は『行番号』のところへ実行を跳ばす.

★　`RANDOMIZE`　(乱数の系列を設定する命令)

★　`INT(`**数値**`)`　(数値の整数部分を与える関数)

★　`RND`　(0以上1未満の乱数を与える関数(変数))

★　IF **条件** THEN **命令**　(『条件』が『真』の時『命令』を実行する

★　IF **条件** THEN

```
IF 条件 THEN
    命令1
ELSE
    命令2
END IF
```

条件が真ならば（正しければ）命令1を実行し，偽ならば（正しくなければ）命令2を実行する．命令2をする必要がなければ，ELSE と命令2は省略する．

BASIC で用いられる『GOTO 文』は多用されると分かりずらい．なるべく『GOTO 文』を用いずにプログラムを作成したい．そのために上のプログラムを次のように変更する，

プログラム例2-1(prog2-1.bas　数当てゲーム)

```
10␣RANDOMIZE
20␣LET␣X=INT(RND*10)
30␣DO
40␣␣␣␣INPUT␣A
50␣␣␣␣IF␣A<X␣THEN␣PRINT␣"もっと大きいよ"
60␣␣␣␣IF␣A>X␣THEN␣PRINT␣"もっと小さいよ"
70␣LOOP␣UNTIL␣A=X
80␣PRINT␣"あたり"
90␣END
```

前判定反復

(1)
```
DO WHILE 条件
    命令
LOOP
```

(2)
```
DO UNTIL 条件
    命令
LOOP
```

繰り返しが始まる前に判定し

(1) は条件が真であれば，命令を繰り返す.

(2) は条件が偽であれば，命令を繰り返す.

後判定反復

(3)
```
DO
    命令
LOOP WHILE 条件
```

(4)
```
DO
    命令
LOOP UNTIL 条件
```

繰り返し１回終わった後で判定し
(3) は条件が真であれば，命令を繰り返す.
(4) は条件が偽であれば，命令を繰り返す.

プログラム例3(prog3.bas　1から100までの和)

```
10␣LET␣S=0
20␣FOR␣K=1␣TO␣100
30␣␣␣␣LET␣␣S=S+K
40␣NEXT␣K
50␣PRINT␣S
60␣END
```

プログラム例3の説明

20–40行目 ：繰り返し．変数(何でも良い)『K』を１ずつ増やしながら，100まで繰り返す.
『IF』〜『NEXT』は次のように用いる.

★ `FOR` **変数=初期値** `TO` **終期値**
　　命令１
　　命令２
　　····
`NEXT` **変数**

練習1

(1)　『INPUT』を用いてキーボードから入力した数までの和を求めるプログラムを作れ.

(2) (1)を変更して

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

を求めるプログラムを作れ.

(3) (1)を変更して

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を求めるプログラムを作れ.

(4) (1)を変更して

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

を求めるプログラムを作れ.

(5) (4)を変更して，自然対数の底(Napierの定数)eの近似値

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

を求めるプログラムを作れ.

グラフィックを用いたプログラム

プログラム例4(prog4.bas　関数 $y=x^3-6x$ のグラフを描く)

```
10␣LET␣␣left=-5
20␣LET␣␣right=5
30␣LET␣␣bottom=-10
40␣LET␣␣top=10
50␣LET␣␣h=0.02
60␣SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
70␣DRAW␣GRID
80␣DRAW␣AXES
90␣def␣f(x)=x^3-6*x
100␣for␣x=-5␣to␣5-h␣step␣h
110␣␣␣LET␣␣x1=x
120␣␣␣LET␣␣y1=f(x1)
130␣␣␣LET␣␣x2=x+h
140␣␣␣LET␣␣y2=f(x2)
150␣␣␣plot␣lines:␣x1,y1;x2,y2
160␣next␣x
170␣END
```

プログラム例4の説明

10-40行目　：変数 left,right,bottom,top に数値を代入している．この数値は60行目でグラフィック座標の左右下上を指定するのに用いられている.

50行目　：グラフを折線で描くときの x の幅を指定する変数 h に数値を代入している.

60行目　：グラフィック座標の左右上下の座標を指定している.

70行目　：グラフィック画面の格子を描いている.

80行目　：グラフィック画面で座標軸を描いている.

90行目　：関数 $f(x)=x^3-6x$ を定義している.

100-160行目：x の値を -5 から $5-h$ まで h ずつ増やしながらその間の命令を繰り返す.

110-120行目：折線を描く線分の始点の座標 $x1$ と $y1$ に数値を代入している.

130-140行目：折線を描く線分の終点の座標 $x2$ と $y2$ に数値を代入している.

150行目　：グラフィック座標 $(x1,y1)$ と $(x2,y2)$ の点を線分で結んでいる.

160 行目　：x の値を h だけ増やして，100 行目に戻る．x の値が $5-h$ を超えたら戻らない..

170 行目　：プログラムを終了する．

★ `SET WINDOW` **左端 , 右端 , 下 , 上** (グラフィック座標の指定)

★ `for` **変数=数値**`1 to` **数値**`2 step` **数値**`3`

　　…

　`next` **変数**

　変数の値を数値 1 から数値 2 まで数値 3 ずつ増やしながら … を繰り返し実行する．

★ `DRAW GRID` (格子を描く)

★ `DRAW AXES` (座標軸を描く)

★ `PLOT LINES:` **数値**`1`, **数値**`2`; **数値**`3`, **数値**`4`

　(数値 1, 数値 2) から (数値 3, 数値 4) まで線分を引く．

プログラム例 5(prog5.bas　媒介変数表示された曲線：サイクロイド (cycloid) を描く)

```
LET␣␣left=-1
LET␣␣right=20
LET␣␣bottom=-10
LET␣␣top=10
LET␣␣h=0.02
SET␣WINDOW␣␣left␣,␣right␣,␣bottom␣,␣top
DRAW␣GRID
DRAW␣AXES
def␣f(t)=t-sin(t)
def␣g(t)=1-cos(t)
for␣t=0␣to␣20-h␣step␣h
␣␣␣LET␣␣x1=f(t)
␣␣␣LET␣␣y1=g(t)
␣␣␣LET␣␣x2=f(t+h)
␣␣␣LET␣␣y2=g(t+h)
␣␣␣plot␣lines:␣x1,y1;x2,y2
next␣t
END
```

練習2 以下,『SET WINDOW』で適当な値を定め次のグラフを描くプログラムを作りなさい.

(1) 原点を中心とし，半径が1である円を描け.

$$(f(t) = \cos t \quad , \quad g(t) = \sin t \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(2) $f(t) = \cos t \quad , \quad g(t) = \sin 3t \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$

(3) (極座標 cardioid=心臓形) $r = 1 + \cos\theta$
(媒介変数表示すれば，$x = (1+\cos t)\cos t \quad , \quad y = (1+\cos t)\sin t \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$)

差分方程式の例のプログラム

差分方程式の例1(example01.bas　マルサスの人口論)

$$P_{n+1} = (1 + a/100)P_n \quad , \quad a = 3 \quad , \quad P_0 = 100\text{万人}$$

```
LET␣A=3
LET␣P0=100
INPUT␣N
FOR␣K=1␣TO␣N
␣␣␣LET␣␣P1=(1+A/100)*P0
␣␣␣PRINT␣K,P1
␣␣␣LET␣P0=P1
NEXT␣K
END
```

グラフ化

```
LET␣A=3
LET␣P0=100
INPUT␣N
SET␣WINDOW␣0,N,0,2000
FOR␣K=1␣TO␣N
␣␣␣LET␣␣P1=(1+A/100)*P0
␣␣␣PRINT␣K,P1
␣␣␣PLOT␣LINES:K-1,P0;K,P1
␣␣␣LET␣P0=P1
NEXT␣K
END
```

練習3　以下，差分方程式の例を計算するプログラムを作りなさい．

(1) 例2(Fibonacciの数列)を計算するプログラム(example02.bas)を作りなさい．

(2) 例3(平面上のn本の直線によって分割される領域の個数)を計算するプログラム(example03.bas)を作りなさい．

($a_{n+1} = a_n + n + 1$)

(3) 例4(ロジスティック増殖)を計算するプログラム(example04.bas)を作りなさい．

($p_{n+1} = \{1 + (a/100)(1 - p_n/C)\}p_n$, $a = 5$, $p_0 = 100$, $C = 700$)

(4) 例5(携帯電話の普及)を計算するプログラム(example05.bas)を作りなさい．

($x_{n+1} = x_n + kx_n(N - x_n)$, $k = 0.1$, $x_0 = 100$, $N = 10000$)

(5) 例6(ウサギとキツネ1)を計算するプログラム(example06.bas)を作りなさい．

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ d/100 & 1 - c/100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

$a = 5$, $b = 10$, $c = 5$, $d = 5$, $R_0 = 1000$, $F_0 = 50$

(6) 例7(ウサギとキツネ2)を計算するプログラム(example07.bas)を作りなさい．

$$R_{n+1} = \{1 + A(1 - R_n/C)\}\, R_n - DR_nF_n$$
$$F_{n+1} = QDR_nF_n$$

$A = 0.5$, $C = 300$, $D = 0.025$, $Q = 0.3$, $R_0 = 1000$, $F_0 = 100$

また，この結果をグラフ化しなさい．

(7) 例8(アユの年齢別個体数)を計算するプログラム(example08.bas)を作りなさい．

$$\begin{bmatrix} P^0_{n+1} \\ P^1_{n+1} \\ P^2_{n+1} \\ P^3_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^0_n \\ P^1_n \\ P^2_n \\ P^3_n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} P^0_0 \\ P^1_0 \\ P^2_0 \\ P^3_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(8) 例9(ローン返済)を計算するプログラム(example09.bas)を作りなさい．

$x_{n+1} = (1 + r)x_n - b$, $x_0 = 1000000$, $r = 0.03$, $b = ?$

(9) 例10(天候の確率)を計算するプログラム(example10.bas)を作りなさい．

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(10) 例12(異なるn個のものをk組に分ける分け方の総数)を計算するプログラム(example12.bas)を作りなさい.

$$f(n+1,k)=f(n,k-1)+kf(n,k) \quad , \quad f(n,1)=1 \quad , \quad f(n,n)=1$$

(11) 例13(自然数nをいくつかの自然数の和に分割する仕方の総数)を計算するプログラム(example13.bas)を作りなさい.

$$p(n,k)=p(n-1,k-1)+p(n-k,k) \quad , \quad p(n,1)=1 \quad , \quad p(n,n)=1$$
$$p(n)=\sum_{k=1}^{n} p(n,k)$$

(12) 例16(Newtonの方程式の解の近似法を用いて$\sqrt{2}$の近似値)を計算するプログラム(example16.bas)を作りなさい.

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n} \quad , \quad x_0=2$$

Appendix B

行列の標準化 (Jordan の標準形)

A を正方行列とする．

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

であるとき，λ を A の **固有値** といい，$\boldsymbol{x}$ を A の固有値 λ に対する **固有ベクトル** という．

定理 B – 1 A : n次正方行列とする．次の同値関係が成り立つ．

A : 正則行列 $\Leftrightarrow$ $\det A = |A| \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow$ A の n 個の列ベクトルが 1 次独立
$\Leftrightarrow$ A の n 個の行ベクトルが 1 次独立
$\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$ しか持たない．

定理 B – 2 A : n次正方行列とする．

λ : A の固有値 $\Leftrightarrow f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = 0$

($f_A(\lambda)$ を A の **固有多項式**，$f_A(\lambda) = 0$ を A の **固有方程式** という)

定理 B – 3 (代数学の基本定理)

n 次多項式

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

($a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ は複素数)

は次の形に因数分解される．

$$f(z) = (z - \alpha_1)^{n_1}(z - \alpha_2)^{n_2} \cdots (z - \alpha_k)^{n_k}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ は複素数，$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$)

代数学の基本定理より，固有多項式は

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

の形に因数分解される．このとき，n_i を 固有値 λ_i の **重複度** という．

$$W_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間となっており，これを A の固有値 λ_i に対する **固有空間** という．また，$1 \leq \dim W_{\lambda_i} \leq n_i$ が成り立つ．

定理 B – 4 $\{\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{im_i}\}$ を W_{λ_i} に属する 1 次独立な組とするとき，それらをあわせた，

$$\{\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1m_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2m_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{k1}, \boldsymbol{p}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{km_k}\}$$

は 1 次独立である．

ある正則行列 P によって，$P^{-1}AP$ が対角行列にできるとき，A を **対角化可能** であるという．

定理 B – 5 A が対角化可能であるための必要条件はすべての固有値 λ_i に対して次のことが成り立つことである．ただし，n_i は固有値 λ_i の重複度とする．

$$\dim W_{\lambda_i} = n_i \quad (\Leftrightarrow n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i I) = n_i)$$

またこのとき，W_{λ_i} の基底を $\{\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{in_i}\}$ とすれば，それらをすべて列ベクトルとする n 次正方行列

$$P = [\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1n_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{k1}, \boldsymbol{p}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{kn_k}]$$

は正則行列であり，

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理 B – 6 A のすべての固有値の重複度が 1 であれば，A は対角化可能である．

問題 B - 1 次の行列の固有値，固有空間の次元と基底を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

問題B - 2 次の行列は対角化可能か？　対角化可能であれば対角化せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

対称行列の直交行列による対角化

$^tA = A$ となる行列 A を **対称行列** という.

$^tPP = I$ (すなわち，$^tP = P^{-1}$) となる行列 P を **直交行列** という.

定理 B − 7 P : n 次正方行列とする．次の同値関係が成り立つ.

P : 直交行列 $\Leftrightarrow$ P の n 個の列ベクトルは $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底である.

$\Leftrightarrow$ P の n 個の行ベクトルはが $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底である.

定理 B − 8 P : 直交行列とすると，$(P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

すなわち，直交行列によりベクトルが変換されても，内積・長さ・なす角を変えない.

定理 B − 9 A が n 次実対称行列であれば，A の固有値はすべて実数となり，異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．また，A は対角化可能となり ($\dim W_{\lambda_i} = n_i$)，W_{λ_i} の基底 $\{\boldsymbol{p}_{i1}, \boldsymbol{p}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{in_i}\}$ を正規直交基底にとり (Gram-Schmidt の直交化法により可能)，

$$P = [\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1n_1}, \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{k1}, \boldsymbol{p}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{kn_k}]$$

とおけば，P は直交行列となり，A は直交行列によって対角化できる.

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = D \quad (D \text{ は対角行列})$$

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の **2次形式** という．(ここで，$a_{ij} = a_{ji}$ とする)

いま，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (A は対称行列) とすれば，

2次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ は $Q(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と書ける．

対称行列 A は直交行列 P によって対角化できるので $({}^tPAP = D$:対角行列)，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x})$ とおけば，

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})AP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}D\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

と書ける．(ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の重複を許した固有値である).

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

を2次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の **標準形** という．

ある正の定数 α があって，2次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \geqq \alpha\|\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つとき，$Q(\boldsymbol{x})$ は **正定値** であるという．

定理 B − 10 2次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値であるための必要十分条件は A のすべての固有値が正であることである．

定理 B − 11 2次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が正定値であるための必要十分条件は次の不等式が成り立つことである．

$$a_{11} > 0\ ,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\ ,\ \cdots\ ,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

問題 B - 3 次の対称行列を対角化する直交行列 P を求めて，$P^{-1}AP$ を対角行列にせよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

問題 B - 4 次の2次形式の正定値性を定理B-11を用いて判定せよ．

(1) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$

(2) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$

(3) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 6yz - 8zx$

Jordanの標準形

正方行列 A が対角化可能でないときには,

$$\widetilde{W}_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid \exists l \quad (A-\lambda_i I)^l \boldsymbol{x} = \mathbf{o}\}$$

とおく．これを固有値 λ_i に対する **一般化された固有空間** という.

定理 B – 12 (Cayley-Hamiltonの定理)

A の固有多項式を

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k} \end{aligned}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} f_A(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I \\ &= (A-\lambda_1 I)^{n_1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_k I)^{n_k} = O \end{aligned}$$

が成り立つ.

いま，A の固有多項式 $f_A(\lambda)$ が1次式に因数分解されているとし，因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ を取り除いた多項式 $f_A(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ を $f_{A,i}(\lambda)$ とおく．このとき $\{f_{A,i}(\lambda)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ は共通因子を持たないのでそれらは互いに素であり，それらの最大公約数は1である.

定理 B – 13 $\{f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \cdots\ ,\ f_k(x)\}$ が互いに素である(最大公約数が1である)とき，次の式を満たす多項式 $\{g_1(x)\ ,\ g_2(x)\ ,\ \cdots\ ,\ g_k(x)\}$ が存在する.

$$g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + \cdots + g_k(x)f_k(x) \equiv 1$$

上で述べた多項式 $\{f_{A,i}(\lambda)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ に対して，定理B - 13 を用いると,

$$g_1(\lambda)f_{A,1}(\lambda) + g_2(\lambda)f_{A,2}(\lambda) + \cdots + g_k(\lambda)f_{A,k}(\lambda) \equiv 1$$

となる多項式 $\{g_i(\lambda)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ が存在する．これより,

$$g_1(A)f_{A,1}(A) + g_2(A)f_{A,2}(A) + \cdots + g_k(A)f_{A,k}(A) \equiv I$$

となり，$g_i(A)f_{A,i}(A) = M_i$ とおくと,

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_k \equiv I \quad , \quad M_iM_j \equiv O \ \ (i \neq j) \quad , \quad M_i^2 = M_i$$

このことを用いると，次の定理が成り立つことがわかる.

定理 B – 14 (1) 一般化された固有空間 $\{\widetilde{W}_{\lambda_i}\}$ は射影作用素 M_i の像(image)となっている．また，$\widetilde{W}_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid \ (A-\lambda_i I)^{n_i}\boldsymbol{x} = \mathbf{o}\}$ である.

(2) $\{\widetilde{W}_{\lambda_i}\}$ の次元は固有値の重複度 n_i に等しい.

(3) $\boldsymbol{R}^n$ は一般化された固有空間 $\{\widetilde{W}_{\lambda_i}\}_{i=1,2,\cdots,k}$ の直和になっている.

すなわち,

$$\boldsymbol{R}^n = \widetilde{W}_{\lambda_1} \oplus \widetilde{W}_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_{\lambda_k}$$

Jordan の標準形にする行列 P の作り方

固有値 $\lambda = \lambda_i$ に対して，その一般化された固有空間 $\widetilde{W}_{\lambda_i}$ の基底を以下のように構成していく．

$$W_{\lambda_i}^{(k)} = \{\boldsymbol{x} \mid (A - \lambda_i I)^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とおくと，

$$W_{\lambda_i} = W_{\lambda_i}^{(1)} \subset W_{\lambda_i}^{(2)} \subset W_{\lambda_i}^{(3)} \subset \cdots \subset W_{\lambda_i}^{(\nu-1)} \subset W_{\lambda_i}^{(\nu)} = \widetilde{W}_{\lambda_i}$$

ここで，

$$\dim W_{\lambda_i}^{(k)} = m_k \quad , \quad r_k = m_k - m_{k-1} (k \geq 2) \quad , \quad r_1 = m_1$$

とおく．すると，次の不等号が成り立つことがわかっている．

$$r_\nu \leq r_{\nu-1} \leq r_{\nu-2} \leq \cdots \leq r_2 \leq r_1 = m_1$$

そこでまず，