数学特論後期試験のための問題

1. 次の数を 10 進法で表わせ.

(1) $(471)_8$　(2) $(11011011)_2$　(3) $(165)_7$

(4) $(21201)_3$　(5) $(1101.101)_2$　(6) $(101.11)_8$

2. 次の問いに答えよ．ただし，16 進法のときは 10 を A で，11 を B で，12 を C で，13 を D で，14 を E で，15 を F とする.

(1) 1000 を 8 進法で表わせ.

(2) 1000 を 2 進法で表わせ.

(3) 1000 を 16 進法で表わせ.

(4) 10.25 を 2 進法で表わせ.

(5) 10.25 を 8 進法で表わせ.

(6) 123.5 を 8 進法で表わせ.

3. 次の 26 進法 (A=0〜Z=25) で表わされた数を 10 進法で表わせ.

(1) $(\mathrm{KOBE})_{26}$　(2) $(\mathrm{YAMA})_{26}$

4. 次の数を 26 進法 (A=0〜Z=25) で表わせ.

(1) 176332　(2) 3687172

5. 次の数を素因数分解し，その約数の個数を求めよ．また，その約数をすべて挙げよ.

(1) 2142　(2) 2520

6. 50!を素因数分解せよ．(プリントの問題 2-4 を参考にせよ)

7.(プリントの問題 2-6 と同じ)

2 つの数の最大公約数を Euclid の互除法を用いて求め，その最大公約数を 2 つの数の 1 次結合で表わせ.

(a) 26 , 18　(b) 187 , 34　(c) 841 , 160　(d) 2613 , 2171

8.(プリントの問題 2-12 を参考にせよ)

2 組の多項式の最大公約数を Euclid の互除法を用いて求め，その最大公約数を 2 組の多項式の 1 次結合で表わせ.

(1) $x^3 - x^2 - x - 2$, $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $x^3 - x^2 - x - 2$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

9.(プリントの問題 2-14 と同じ)

2 つの Gauss 整数の最大公約数を Euclid の互除法を用いて求めよ

(1) $g.c.d.(5 + 6i, 3 - 2i)$ (2) $g.c.d.(7 - 11i, 8 - 19i)$

10.(プリントの問題 3-1 と同じ) 次の解を求めよ.

(1) $3x \equiv 4 \mod 7$ (2) $3x \equiv 4 \mod 12$

(3) $9x \equiv 12 \mod 21$ (4) $27x \equiv 25 \mod 256$

(5) $27x \equiv 72 \mod 900$ (6) $103x \equiv 612 \mod 676$

11. 次の逆元を求めよ．計算が厄介なものは拡張 Euclid の互除法と PropositionII.3.1 の証明を参考にして，(また，7 番の問題の結果も参考にするとよい)

(1) $9^{-1} \equiv ? \mod 13$ (2) $2^{-1} \equiv ? \mod 11$

(3) $160^{-1} \equiv ? \mod 841$ (4) $167^{-1} \equiv ? \mod 201$

12.(プリントの問題 3-2 と同じ)

完全平方数を 16 進法で表わすとき，第 1 位の数字は何になるか？ 可能な数字をすべてあげよ.

13.(プリントの問題 3-3 と同じ)

連続する 2 つの正の奇数の積を 12 進法で表わすとき，第 1 位の数字は何になるか？可能な数字をすべてあげよ.

14.(プリントの問題 3-4 と同じ) n を 10 進法で表わすとき，次のことを証明せよ.

$3|n \iff 3|$(各桁の数字の和)

$9|n \iff 9|$(各桁の数字の和)

15.(プリントの問題 3-5 と同じ)　$30|(n^5 - n)$ であることを証明せよ.

16.((2),(3) はプリントの問題 3-9, 問題 3-10 と同じ)　次の合同方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 4 \mod 9 \\ x \equiv 4 \mod 11 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 11 \\ x \equiv 2 \mod 12 \\ x \equiv 3 \mod 13 \end{cases}$

17.((3) はプリントの問題 3-14 と同じ)　繰り返し自乗法を用いて次の値を計算せよ.

(1)　$5^{13} \equiv ? \mod 23$　(2)　$28^{749} \equiv ? \mod 1147$　(3)　$38^{75} \equiv ? \mod 103$

18.(問題 3-17 と同じ)　$\varphi(90)$, $\varphi(91)$, $\varphi(92)$, $\cdots$, $\varphi(100)$ を求めよ.

19.(問題 4-2 と同じ)　$2^n - 1$ が素数であれば, n も素数であることを示せ.
また, $2^n + 1$ が素数であれば, n は 2 の巾乗であることを示せ.
$2^n - 1$ のタイプの素数を **Mersenne 素数** といい, 最初のほうは $3, 7, 31, 127, \cdots$
$2^n + 1$ のタイプの素数を **Fermat 素数** といい, 最初のほうは $3, 5, 17, 257, \cdots$

20.(問題 4-6〜問題 4-10 の一部と同じ)　PropositionII.4.3 とその後の Example を参考にして, 次の数を素因数分解せよ.

(1)　$3^{15} - 1 = 14348906$
(2)　$3^{24} - 1 = 282429536480$
(3)　$5^{12} - 1 = 244140624$
(4)　$10^5 - 1$
(5)　$10^6 - 1$
(6)　$2^{33} - 1 = 8589934591$
(7)　$2^{21} - 1 = 2097151$
(8)　$2^{15} - 1 = 32767$
(9)　$2^{30} - 1 = 1073741823$
(10)　$2^{60} - 1 = 1152921504606846975$