数学特論後期試験のための問題の略解

1.

(1) $(471)_8 = 313$ (2) $(11011011)_2 = 219$ (3) $(165)_7 = 96$

(4) $(21201)_3 = 208$ (5) $(1101.101)_2 = 13 + \frac{5}{8}$ (6) $(101.11)_8 = 65 + \frac{9}{64}$

2.

(1) $1000 = (1750)_8$ (2) $1000 = (1111101000)_2$ (3) $1000 = (3E8)_{16}$

(4) $10.25 = (1010.01)_2$ (5) $10.25 = (12.2)_8$ (6) $123.5 = (173.4)_8$

3.

(1) $(\mathrm{KOBE})_{26} 185254$ (2) $(\mathrm{YAMA})_{26} = 422136$

4.

(1) $176332 = (\mathrm{KAWA})_{26}$ (2) $3687172 = (\mathrm{IBUKI})_{26}$

5.

(1) $2142 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17$ 約数の個数 $= 24$

約数{1,2,3,6,7,9,14,17,18,21,34,42,51,63,102,119,126,153,238,306,357,714,1071,2142}

(2) $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 約数の個数 $= 48$

約数{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,18,20,21,24,28,30,35,36,40,42,45,56,60,,63,70,72,84
,90,105,120,126,140,168,180,210,252,280,315,360,420,504,630,840,1260,2520}

6.

$50! = 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$

7.

(a) 26 , 18 $g.c.d.(26, 18) = 2 = 18 \cdot 3 + 26 \cdot (-2)$

(b) 187 , 34 $g.c.d.(187, 34) = 17 = 187 + 34 \cdot (-5)$

(c) 841 , 160 $g.c.d.(841, 160) = 1 = 160 \cdot 205 + 841 \cdot (-39)$

(d) 2613 , 2171 $g.c.d.(2613, 2171) = 13 = 2171 \cdot 65 + 2613 \cdot (-54)$

8. (1) $g.c.d.(2x^3+3x^2+3x+1, x^3-x^2-x-2) = x^2+x+1$

$$= (2x^3+3x^2+3x+1)\cdot\tfrac{1}{5} + (x^3-x^2-x-2)\cdot(-\tfrac{2}{5})$$

(2) $g.c.d.(x^3+3x^2+3x+1, x^3-x^2-x-2) = 27$

$$= (x^3+3x^2+3x+1)(4x^2+4x-23) - (x^3-x^2-x-2)(4x^2+20x+25)$$

または,

$g.c.d.(x^3+3x^2+3x+1, x^3-x^2-x-2) = 1$

$$= (x^3+3x^2+3x+1)\cdot\tfrac{1}{27}(4x^2+4x-23) - (x^3-x^2-x-2)\cdot\tfrac{1}{27}(4x^2+20x+25)$$

9. (1) $g.c.d.(5+6i, 3-2i) = 1 = (5+6i)-(3-2i)\cdot 2i$

(2) $g.c.d.(7-11i, 8-19i) = -2+i = (7-11i)(-3+2i)-(8-19i)(-2+i)$

10. (1) $x = 6+7n$ (2) 解なし (3) $x = 6+7n$

(4) $x = 219+256n$ (5) $x = 36+100n$ (6) $x = 636+676n$

11. (1) $3+13n$ (2) $6+11n$

(3) $205+841n$ (4) $65+201n$

12. $\{0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 9\}$

13. $\{3\ ,\ 11\}$

14. ヒント：$n = d_{k-1}\cdot 10^{k-1} + d_{k-2}\cdot 10^{k-2} + \cdots + d_1\cdot 10 + d_0$ と置き,

$n = d_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1) + d_{k-2}\cdot(10^{k-2}-1) + \cdots + d_1\cdot(10-1) + (d_{k-1}+d_{k-2}+\cdots+d_1+d_0)$
の形で考える.

15. ヒント：$n^5-n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ が 2 の倍数なので，n^5-n は 2 の倍数であり，3 の倍数であり，5 の倍数であることを示す.

5 の倍数であることは Fermat の小定理 $(p=5)$ を用いてもよい.

16. (1) $x = 23+105n$ (2) $x = 4+693n$ (3) $x = 1706+1716n$

17. (1) $5^{13} \equiv 21 \mod 23$ (2) $28^{749} \equiv 289 \mod 1147$

(3) $38^{75} \equiv 79 \mod 103$

18. $\varphi(90) = 24$, $\varphi(91) = 72$, $\varphi(92) = 44$, $\varphi(93) = 60$, $\varphi(94) = 46$

$\varphi(95) = 72$, $\varphi(96) = 32$, $\varphi(97) = 96$, $\varphi(98) = 42$, $\varphi(99) = 60$

$\varphi(100) = 40$

19. 「$2^n - 1$ が素数であれば，n も素数である」こと

$\because$ n が素数でなければ $n = kl(k \geqq 2, l \geqq 2)$ と書ける．

$2^n - 1 = (2^k)^l - 1 = (2^k - 1)(2^{k(l-1)} + 2^{k(l-2)} + \cdots + 2^k + 1)$ となり，$2^n - 1$ は合成数 (素数でない) になってしまう．よって，n は素数でなければならない．

「$2^n + 1$ が素数であれば，n は 2 の巾乗である」こと

$\because$ n が 2 の巾乗でなければ $n = kl(k$ は 3 以上の奇数$)$ と書ける．

$2^n + 1 = (2^l)^k + 1 = (2^l + 1)(2^{l(k-1)} - 2^{l(k-2)} + \cdots - 2^l + 1)$ となり，$2^n - 1$ は合成数 (素数でない) になってしまう．よって，n は 2 の巾乗でなければならない．

20. (1) $3^{15} - 1 = 14348906 = 2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 4561$

(2) $3^{24} - 1 = 282429536480 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 73 \cdot 6481$

(3) $5^{12} - 1 = 244140624 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 601$

(4) $10^5 - 1 = 99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$

(5) $10^6 - 1 = 999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$

(6) $2^{33} - 1 = 8589934591 = 7 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 599479$

(7) $2^{21} - 1 = 2097151 = 7^2 \cdot 127 \cdot 337$

(8) $2^{15} - 1 = 32767 = 7 \cdot 31 \cdot 151$

(9) $2^{30} - 1 = 1073741823 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 151 \cdot 331$

(10) $2^{60} - 1 = 1152921504606846975 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 151 \cdot 331 \cdot 1321$